# EL ORDEN DE LA DIVISIBILIDAD EN LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS Y SU INFLUENCIA EN LAS MATEMÁTICAS

Joaquín Luna Torres

SEMINARIO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

junio de 2018

# Parte I

## ÓRDENES EN $\mathbb{N}$ Y $\mathbb{Z}^+$

# El orden aditivo

El orden aditivo en $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ está dado por

$$a \leqslant b \quad \text{si y solo si existe} \quad c \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad a + c = b$$

# El orden aditivo

El orden aditivo en $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ está dado por

$$a \leqslant b \quad \text{si y solo si existe} \quad c \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad a + c = b$$

así que

$$0 < 1 < 2 < \cdots .$$

# El orden aditivo

El orden aditivo en $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ está dado por

$$a \leqslant b \quad \text{si y solo si existe} \quad c \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad a + c = b$$

así que

$$0 < 1 < 2 < \cdots .$$

escrito de otra forma

# El orden aditivo

El orden aditivo en $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ está dado por

$$a \leqslant b \quad \text{si y solo si existe} \quad c \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad a + c = b$$

así que

$$0 < 1 < 2 < \cdots .$$

escrito de otra forma

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

Note que ahora $m \leqslant_{|} n$ significa que

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

Note que ahora $m \leqslant_{|} n$ significa que

" $m$ divide a $n$", o que "$n$ es multiplo de $m$".

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

Note que ahora $m \leqslant_{|} n$ significa que

" $m$ divide a $n$", o que "$n$ es multiplo de $m$".

Utilizando

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

Note que ahora $m \leqslant_{|} n$ significa que

" $m$ divide a $n$", o que "$n$ es multiplo de $m$".

Utilizando

$$\longrightarrow$$

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

Note que ahora $m \leqslant_{|} n$ significa que

" $m$ divide a $n$", o que "$n$ es multiplo de $m$".

Utilizando

$\longrightarrow$ en lugar de

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

Note que ahora $m \leqslant_{|} n$ significa que

" $m$ divide a $n$", o que "$n$ es multiplo de $m$".

Utilizando

$$\longrightarrow \qquad \text{en lugar de} \quad \leqslant_{|}$$

# El orden multiplicativo

El orden multiplicativo o de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ está dado por

$$m \leqslant_{|} n \quad \text{si y solo si existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad mk = n$$

Note que ahora $m \leqslant_{|} n$ significa que

" $m$ divide a $n$", o que "$n$ es multiplo de $m$".

Utilizando

$$\longrightarrow \qquad \text{en lugar de} \qquad \leqslant_{|}$$

tenemos el diagrama que sigue:

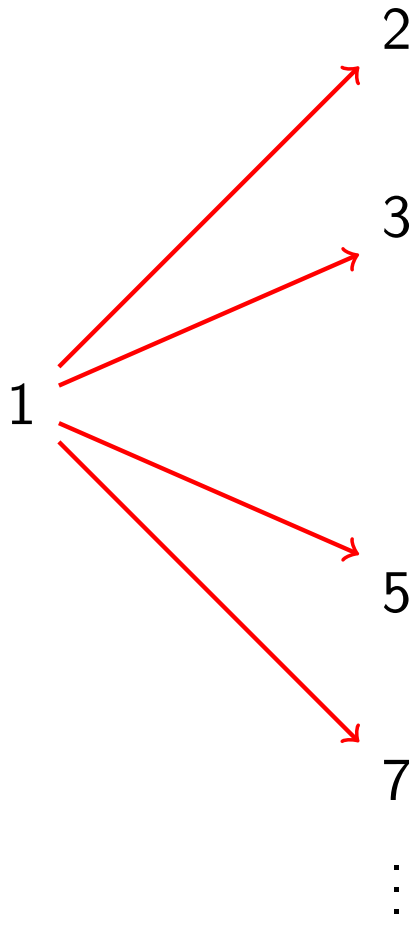
# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant_|)$

1

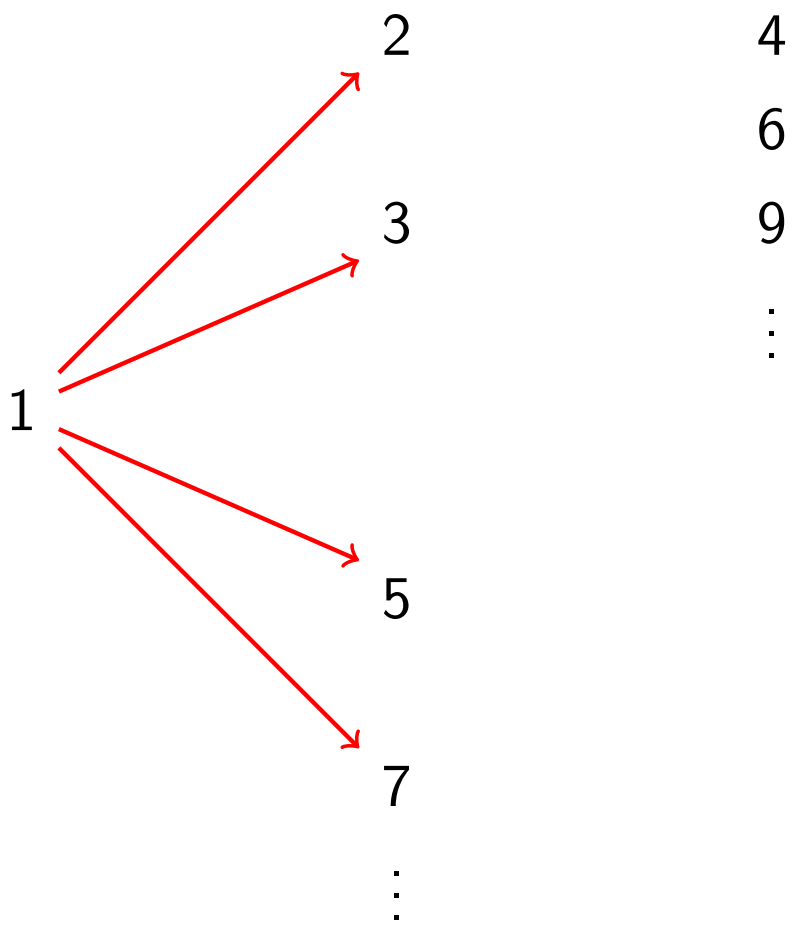
# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant_|)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & 2 & \\
 & 3 & \\
1 & & \\
 & 5 & \\
 & 7 & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

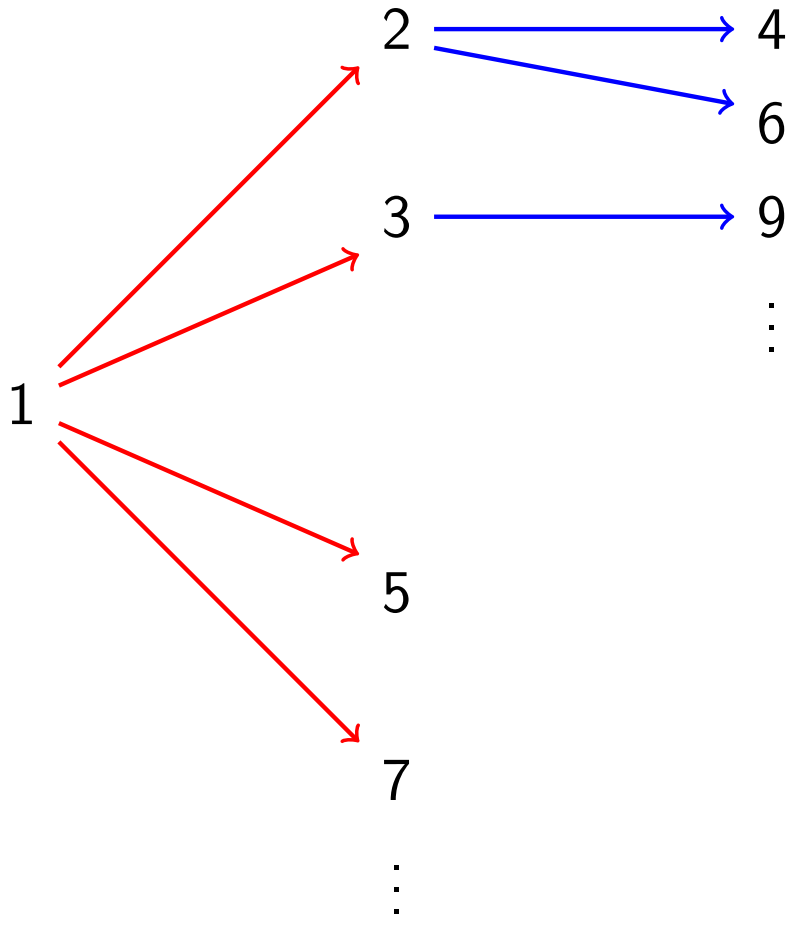
# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant_|)$



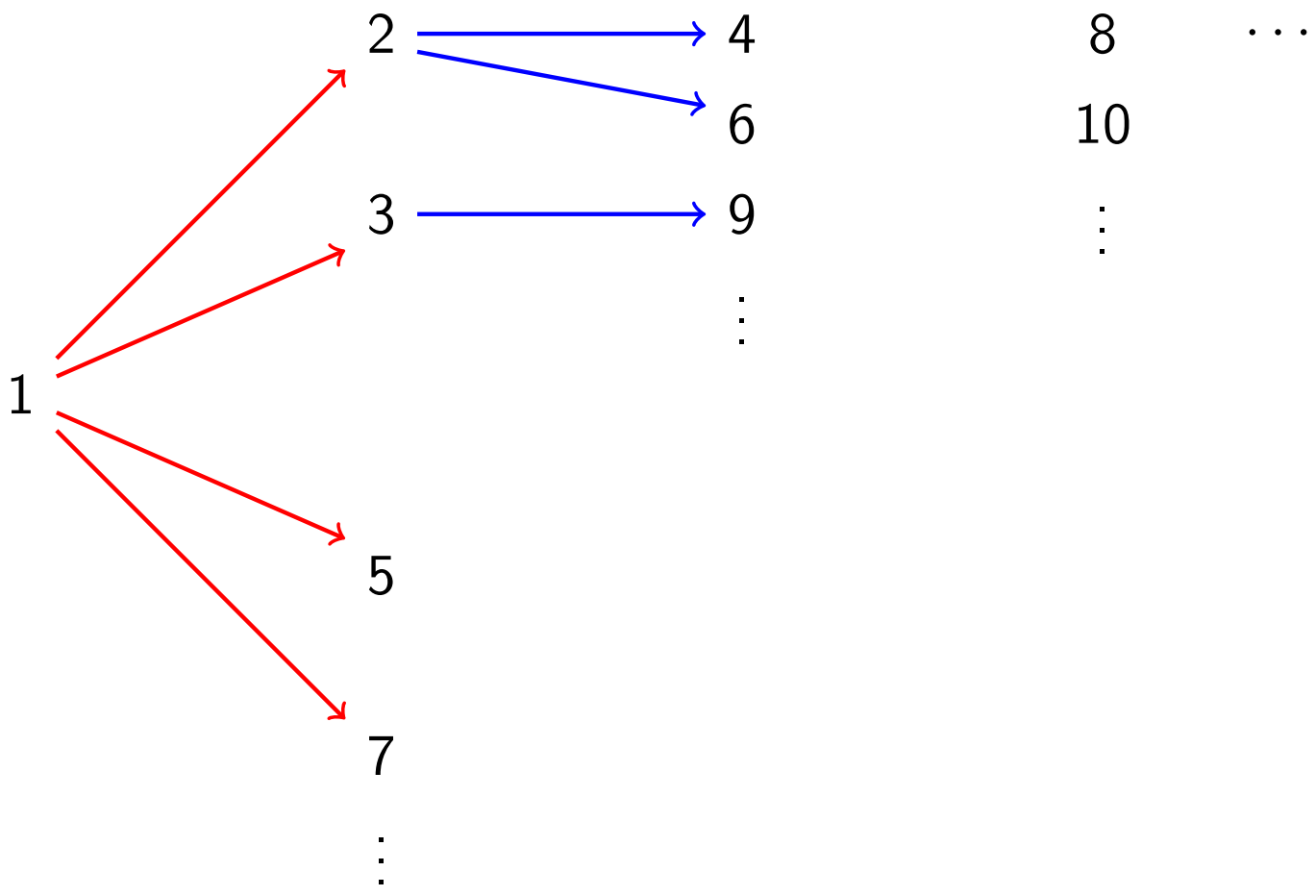
# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant_|)$



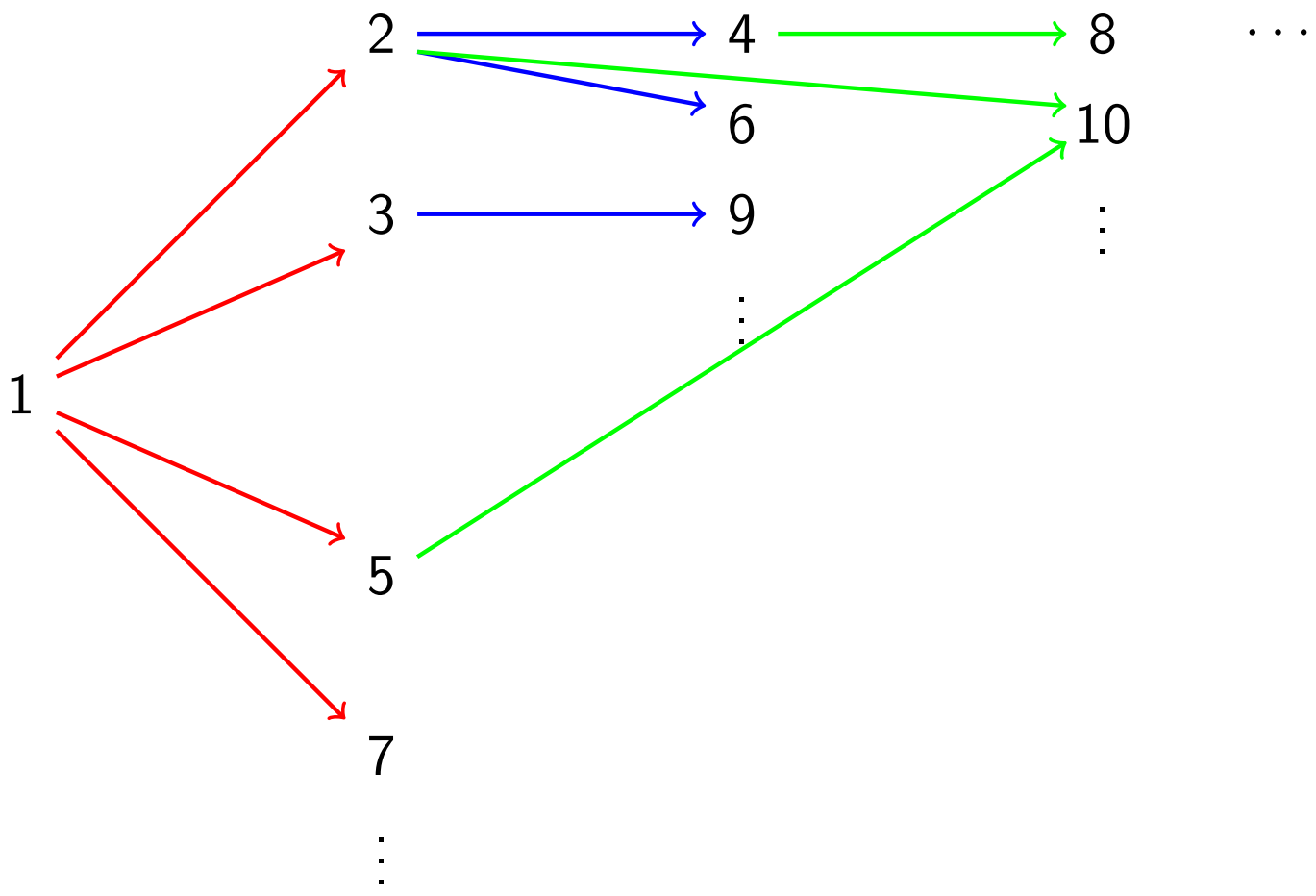
# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant_|)$



# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant_|)$



# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant_|)$



# Parte II

# RETÍCULOS DE DIVISIBILIDAD

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado* $(L, \leqslant)$ *en el cual, para cada par de elementos* $x, y \in L$*, existen un supremo* $x \vee y$ *y un ínfimo* $x \wedge y$*.*

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado* $(L, \leqslant)$ *en el cual, para cada par de elementos* $x, y \in L$*, existen un supremo* $x \vee y$ *y un ínfimo* $x \wedge y$*.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado* $(L, \leqslant)$ *en el cual, para cada par de elementos* $x, y \in L$*, existen un supremo* $x \vee y$ *y un ínfimo* $x \wedge y$*.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:

$$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{array}$$

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado* $(L, \leqslant)$ *en el cual, para cada par de elementos* $x, y \in L$*, existen un supremo* $x \vee y$ *y un ínfimo* $x \wedge y$*.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:

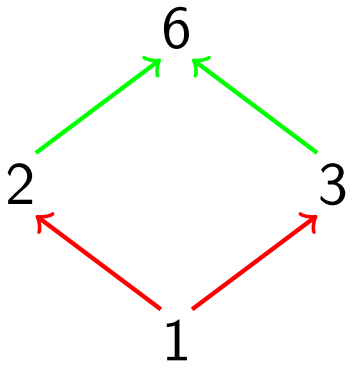
$$\begin{tikzcd}
 & 6 & \\
2 & & 3 \arrow[ul] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado* $(L, \leqslant)$ *en el cual, para cada par de elementos* $x, y \in L$*, existen un supremo* $x \vee y$ *y un ínfimo* $x \wedge y$*.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:

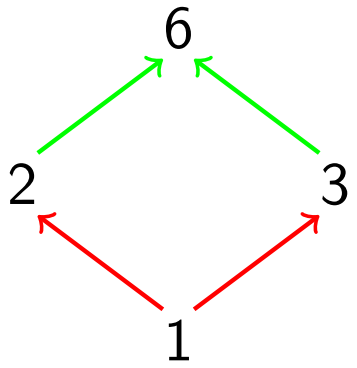


# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leqslant)$ en el cual, para cada par de elementos $x, y \in L$, existen un supremo $x \vee y$ y un ínfimo $x \wedge y$.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:




$1 \wedge 2 = 1$

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leqslant)$ en el cual, para cada par de elementos $x, y \in L$, existen un supremo $x \vee y$ y un ínfimo $x \wedge y$.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:

$$\begin{tikzcd}
 & 6 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$1 \wedge 2 = 1$

$2 \wedge 3 = 1$

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leqslant)$ en el cual, para cada par de elementos $x, y \in L$, existen un supremo $x \vee y$ y un ínfimo $x \wedge y$.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:

$$\begin{tikzcd}
 & 6 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$1 \wedge 2 = 1 \quad 1 \vee 2 = 2$

$2 \wedge 3 = 1$

# Retículos

**Definición**

*un retículo, red o lattice es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leqslant)$ en el cual, para cada par de elementos $x, y \in L$, existen un supremo $x \vee y$ y un ínfimo $x \wedge y$.*

Si $\mathfrak{D}_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ es el conjunto de los divisores de 6, entonces $(\mathfrak{D}_6, \leqslant_|)$ es un retículo:

$$\begin{tikzcd}
 & 6 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$1 \wedge 2 = 1 \qquad 1 \vee 2 = 2$$
$$2 \wedge 3 = 1 \qquad 2 \vee 3 = 6$$

## Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$

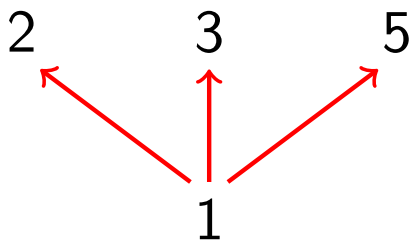
1

## Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$

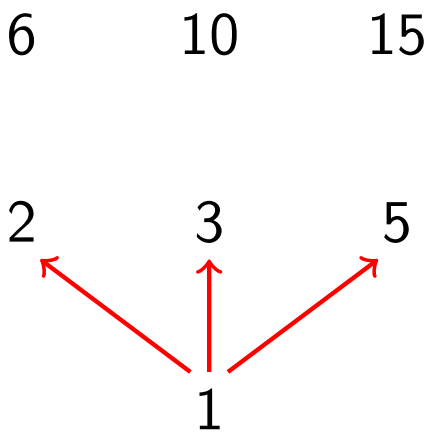
2 3 5

1

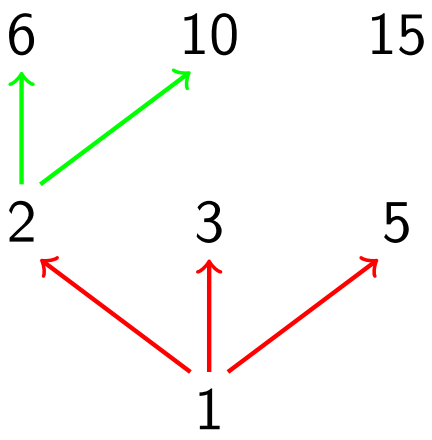
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



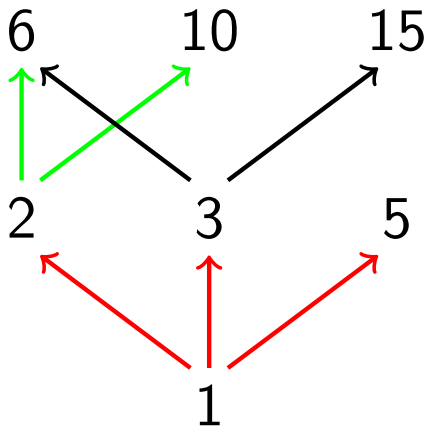
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



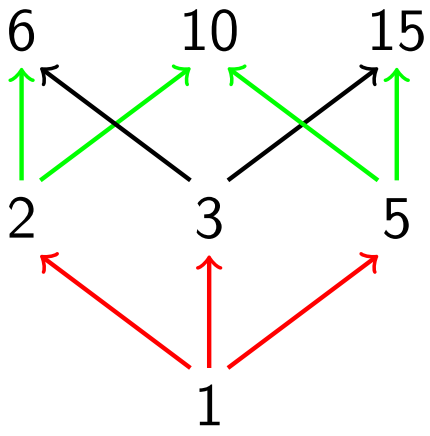
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



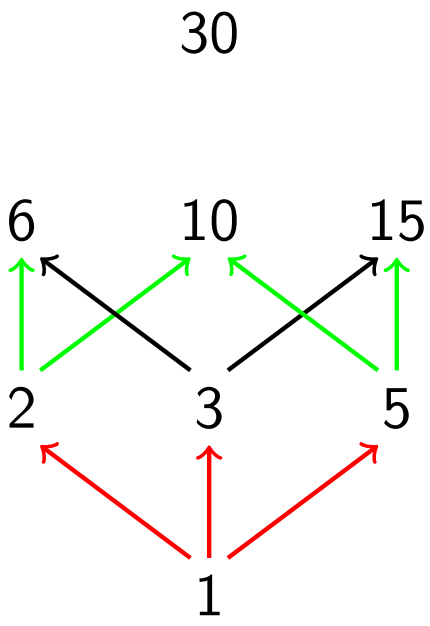
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



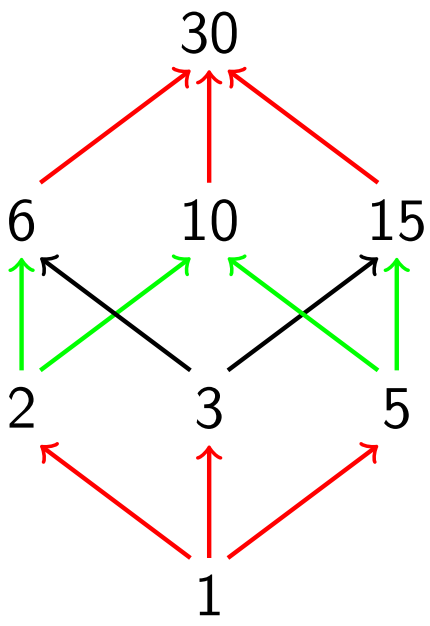
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



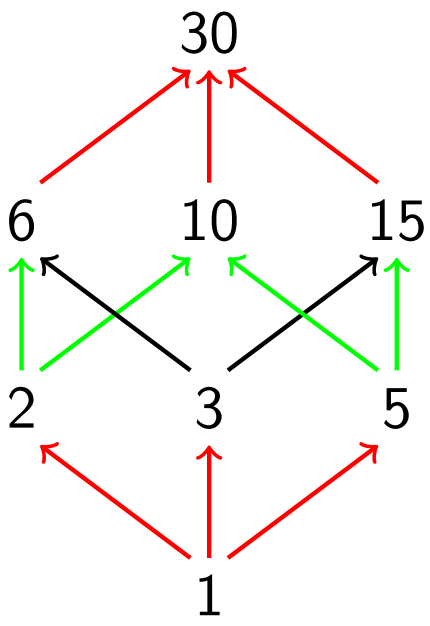
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$

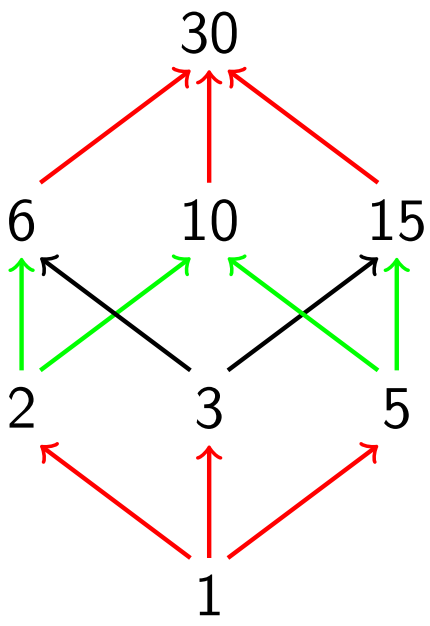


# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$




$\emptyset$

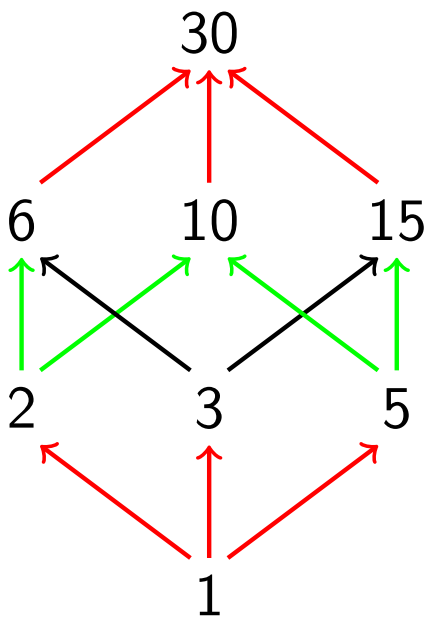
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$

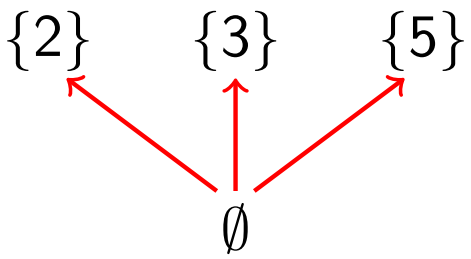



$\{2\}$ $\{3\}$ $\{5\}$

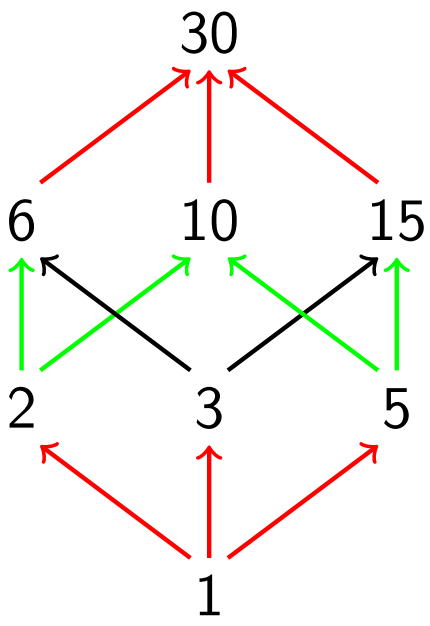
$\emptyset$

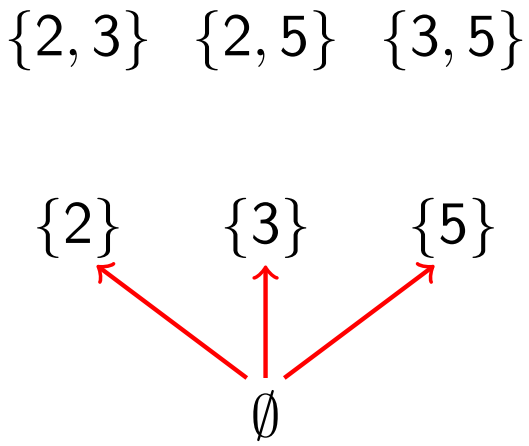
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



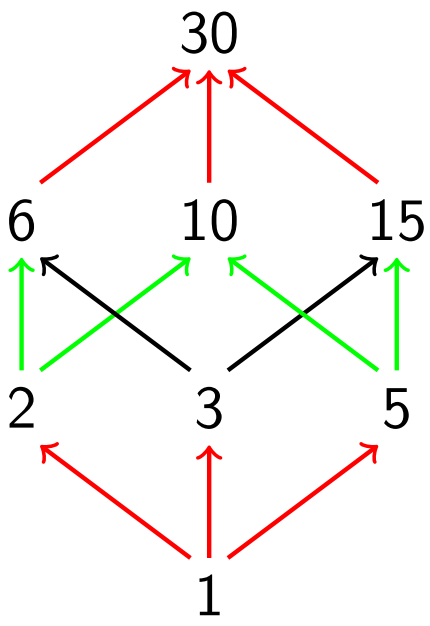



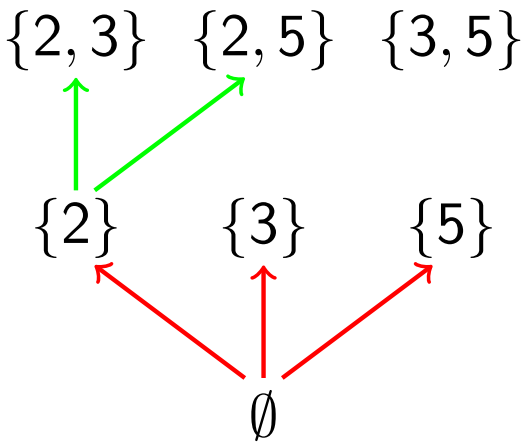
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



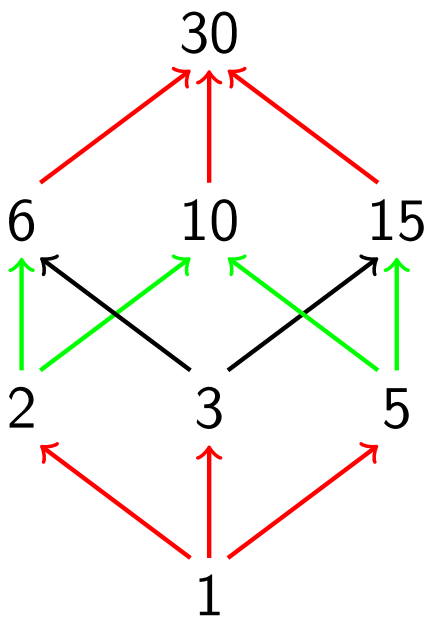



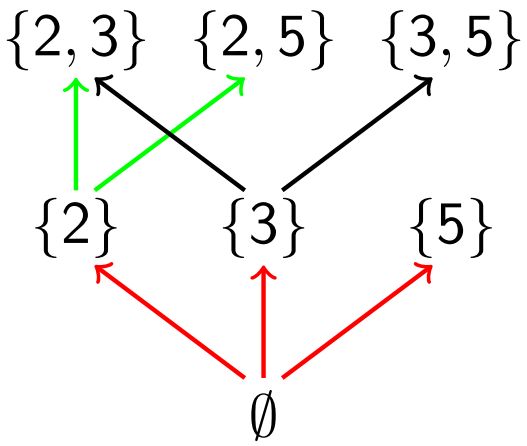
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



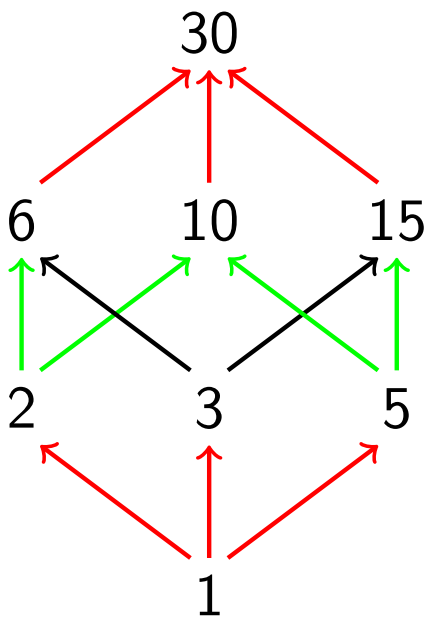



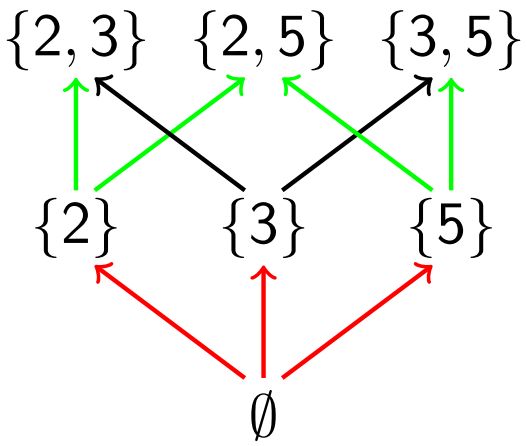
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



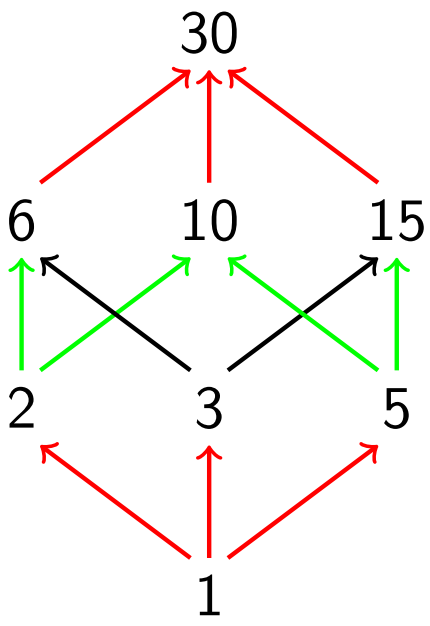



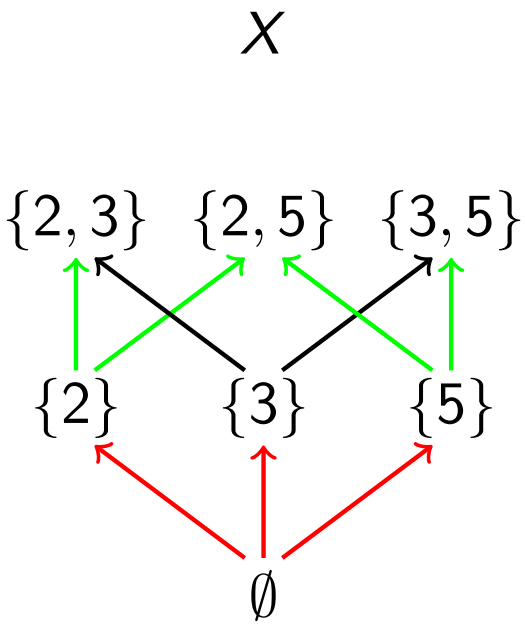
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



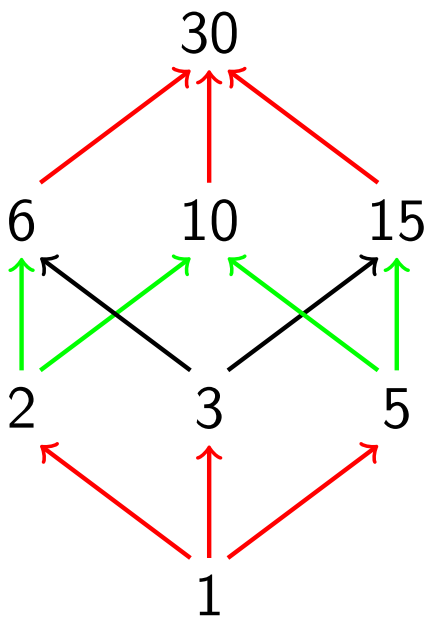



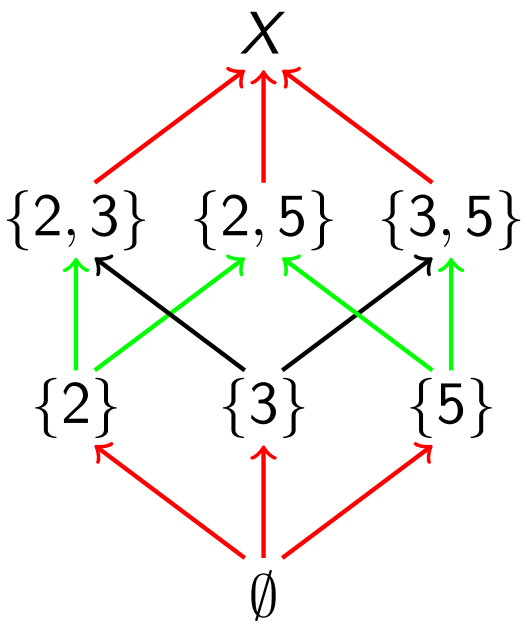
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



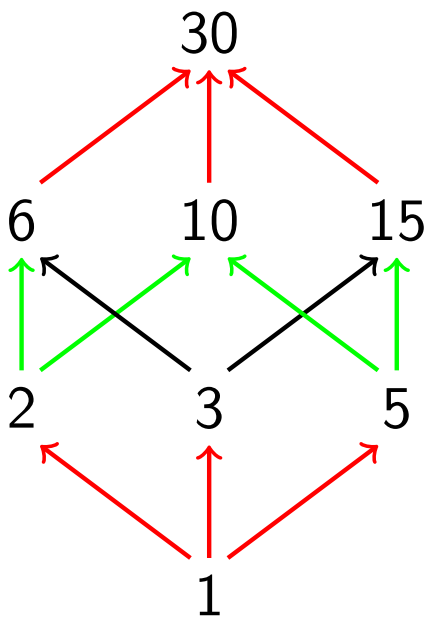



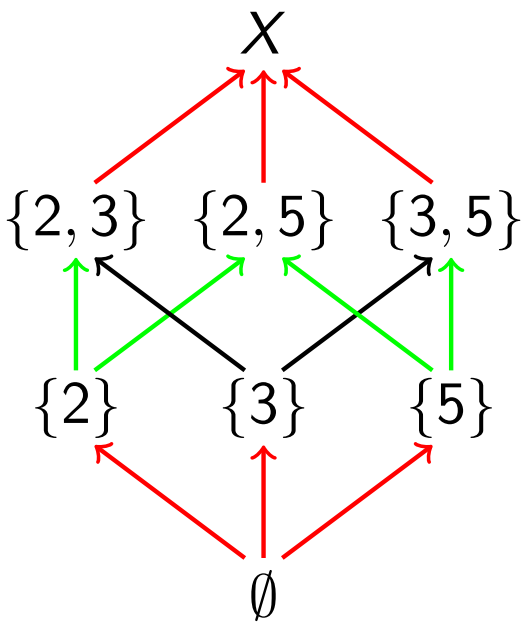
# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$



# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$

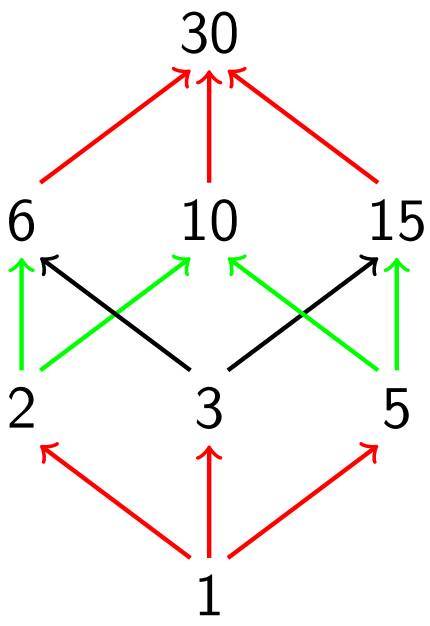


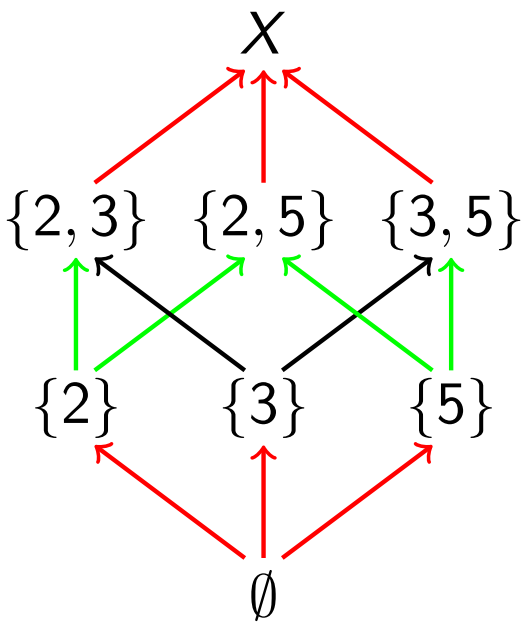




$$a \wedge b = m.c.d\{a, b\}$$

$$a \vee b = m.c.m\{a, b\}$$

# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$

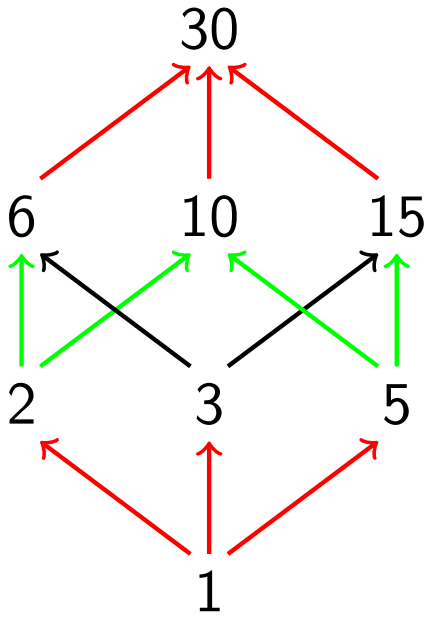


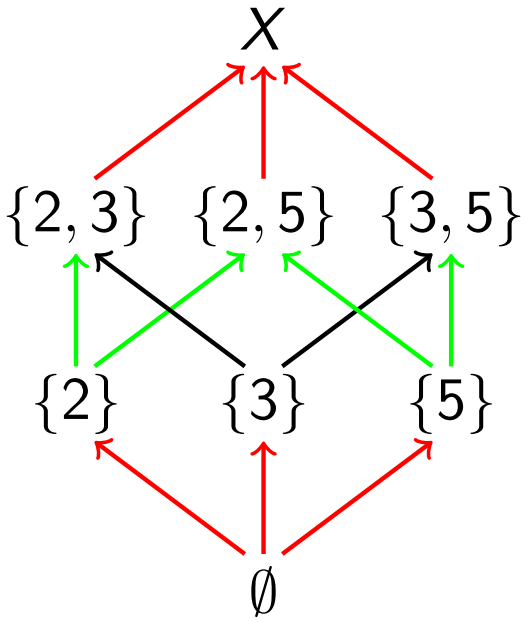




$$a \wedge b = m.c.d\{a, b\}$$
$$a \vee b = m.c.m\{a, b\}$$

$$A \wedge B = A \cap B$$
$$A \vee B = A \cup B$$

# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$




$$a \wedge b = m.c.d\{a, b\}$$

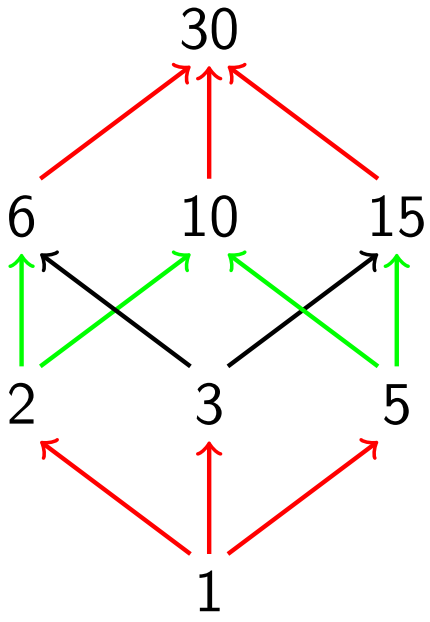
$$a \vee b = m.c.m\{a, b\}$$

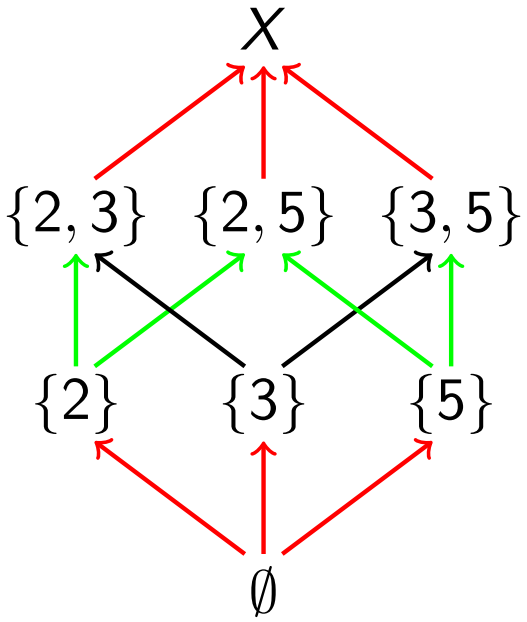
$$\neg 2 = 15$$

$$A \wedge B = A \cap B$$

$$A \vee B = A \cup B$$

# Retículos de $\mathfrak{D}_{30}$ y $\mathfrak{P}(X)$ para $X = \{2, 3, 5\}$




$$a \wedge b = m.c.d\{a, b\}$$

$$a \vee b = m.c.m\{a, b\}$$

$$\neg 2 = 15$$

$$A \wedge B = A \cap B$$

$$A \vee B = A \cup B$$

$$\{2\}^c = \{3, 5\}$$

# Parte III

# ÁLGEBRAS DE BOOLE Y DE HEYTING

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

1. *Idempotencia:* $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

1. *Idempotencia:* $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.
2. *Conmutatividad:* $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

1. *Idempotencia:* $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.
2. *Conmutatividad:* $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.
3. *Asociatividad:*
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge C)$; $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

1. *Idempotencia:* $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.
2. *Conmutatividad:* $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.
3. *Asociatividad:*
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge C)$; $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
4. *Absorción:* $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$.

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

1. *Idempotencia:* $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.
2. *Conmutatividad:* $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.
3. *Asociatividad:*
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge C)$; $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
4. *Absorción:* $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$.
5. *Distributividad:*
   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

1. *Idempotencia:* $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.
2. *Conmutatividad:* $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.
3. *Asociatividad:*
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge C)$; $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
4. *Absorción:* $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$.
5. *Distributividad:*
   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
6. *Complemento: existe $\neg a \in B$ tal que*
   $a \wedge \neg a = \bot$; $a \vee \neg a = \top$.

## Definición

*Dado un conjunto $B$, la sextupla $(B, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$ es un álgebra de Boole si $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias clausurativas en $B$ que satisfacen, para todo $a, b, c \in B$:*

1. *Idempotencia:* $a \wedge a = a; \quad a \vee a = a.$
2. *Conmutatividad:* $a \wedge b = b \wedge a; \quad a \vee b = b \vee a.$
3. *Asociatividad:*
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge C); \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$
4. *Absorción:* $a \wedge (a \vee b) = a; \quad a \vee (a \wedge b) = a.$
5. *Distributividad:*
   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c); \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$
6. *Complemento: existe $\neg a \in B$ tal que*
   $a \wedge \neg a = \bot; \quad a \vee \neg a = \top.$
7. *Leyes de De Morgan:*
   $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b; \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$

# Ejemplos de álgebras de Boole

**Ejemplo**

$\mathfrak{D}_{30}$ es un álgebra de Boole, donde $\bot = 1, \ \top = 30$.

# Ejemplos de álgebras de Boole

**Ejemplo**

$\mathfrak{D}_{30}$ es un álgebra de Boole, donde $\bot = 1, \ \top = 30$.

**Ejemplo**

Para todo conjunto $X$, $\mathfrak{P}(X)$ es un álgebras de Boole, donde $\bot = \emptyset, \ \top = X$.

# Los divisores de un número entero positivo

Hemos afirmado que

para todo conjunto $X$, el retículo $\mathfrak{P}(X)$ es un álgebra de Boole.

# Los divisores de un número entero positivo

Hemos afirmado que

para todo conjunto $X$, el retículo $\mathfrak{P}(X)$ es un álgebra de Boole.

Ahora nos preguntamos,

# Los divisores de un número entero positivo

Hemos afirmado que

para todo conjunto $X$, el retículo $\mathfrak{P}(X)$ es un álgebra de Boole.

Ahora nos preguntamos,

si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$,
¿ es $\mathfrak{D}_n$ un álgebra de Boole?.

# Los divisores de un número entero positivo

Hemos afirmado que

para todo conjunto $X$, el retículo $\mathfrak{P}(X)$ es un álgebra de Boole.

Ahora nos preguntamos,

si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$,
¿ es $\mathfrak{D}_n$ un álgebra de Boole?.

Veamos otros casos particulares

# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$

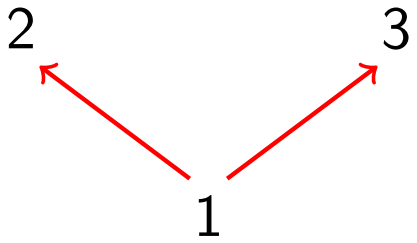
1

# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$

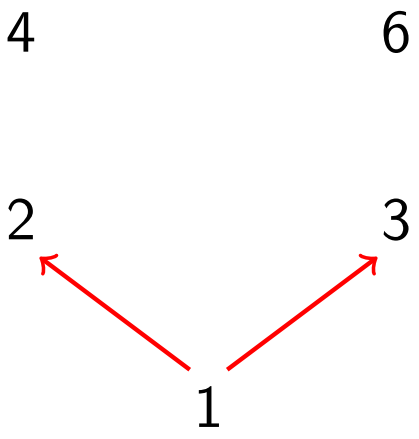
2 3

1

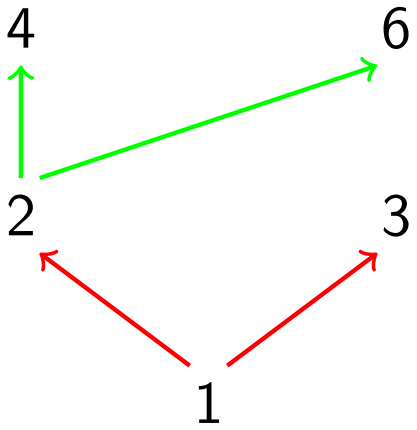
# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$



# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$



# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$



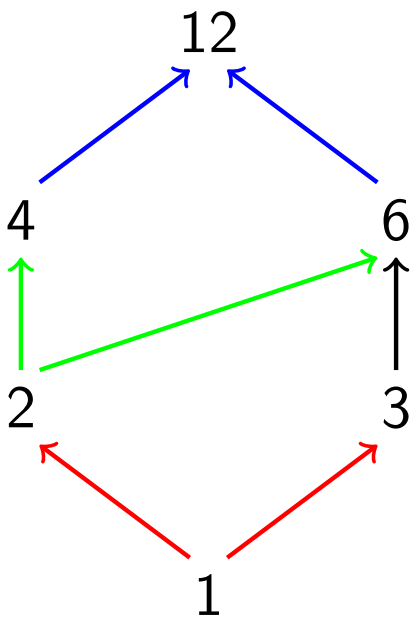
# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$

$$\begin{tikzcd}
4 & & 6 \\
2 \arrow[u] \arrow[urr] & & 3 \arrow[u] \\
& 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

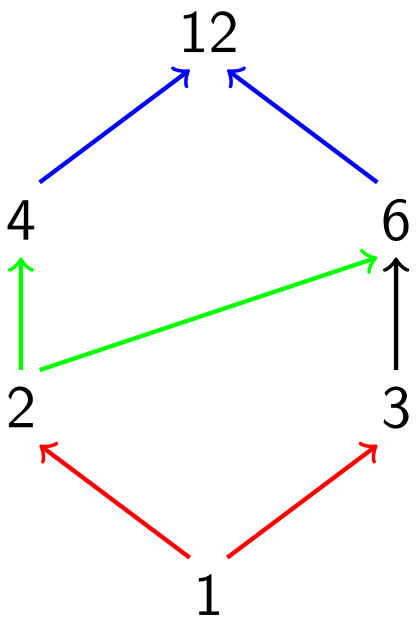
# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$

$$\begin{tikzcd}
 & 12 & \\
4 \arrow[ur] & & 6 \\
2 \arrow[u] \arrow[urr] & & 3 \arrow[u] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$

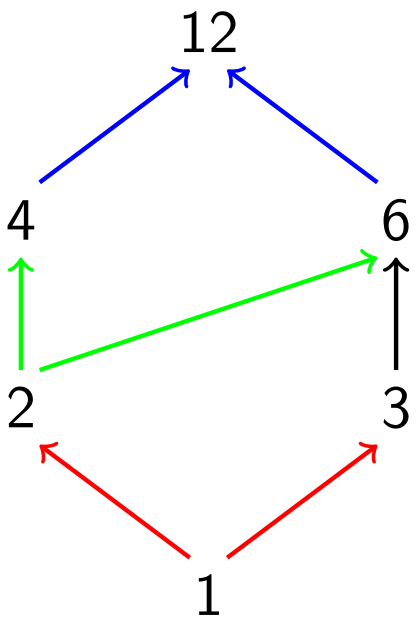


# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$




$\neg 2$ no existe

# El retículo $\mathfrak{D}_{12}$




$\neg 2$ no existe

¡$\mathfrak{D}_{12}$ no es un álgebra de Boole!

# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes

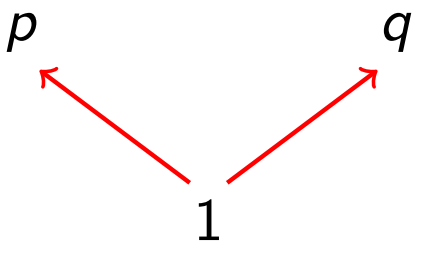
$$1$$

# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes

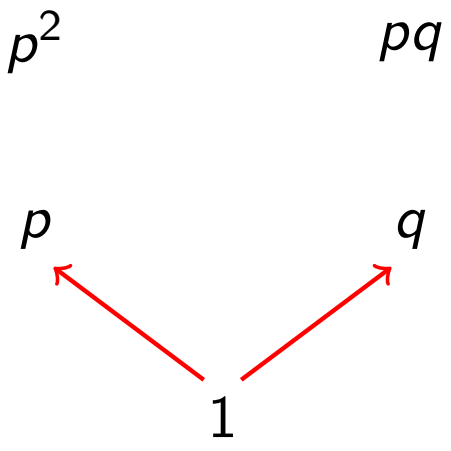
$p$ $q$

$1$

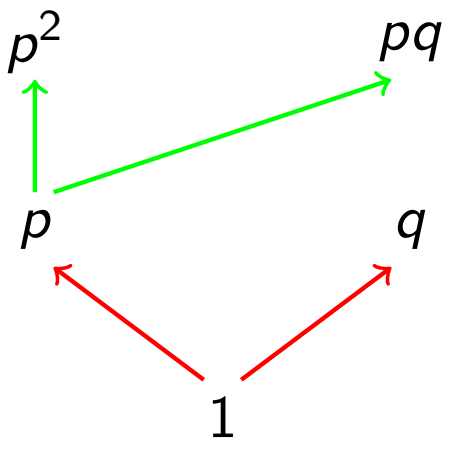
# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes



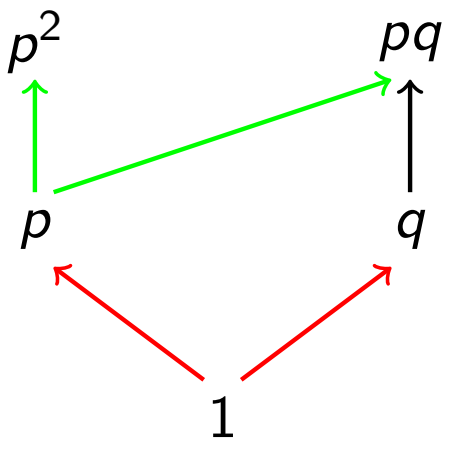
# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes



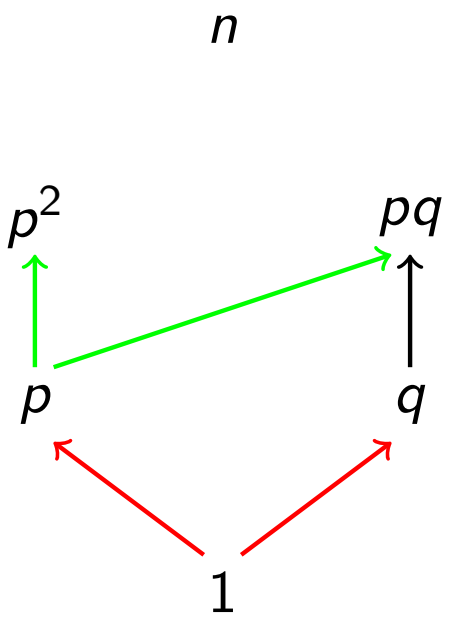
# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes



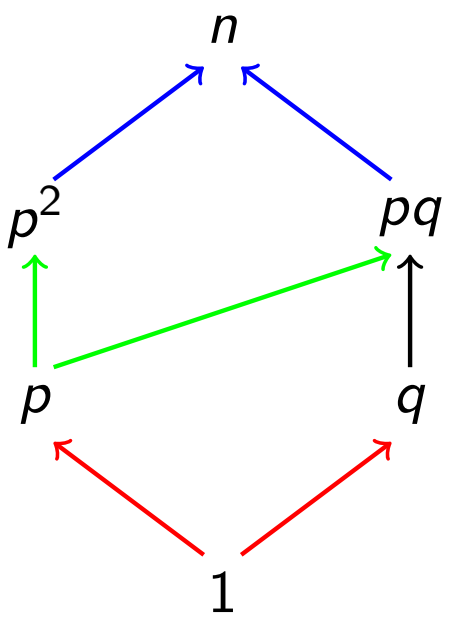
# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes



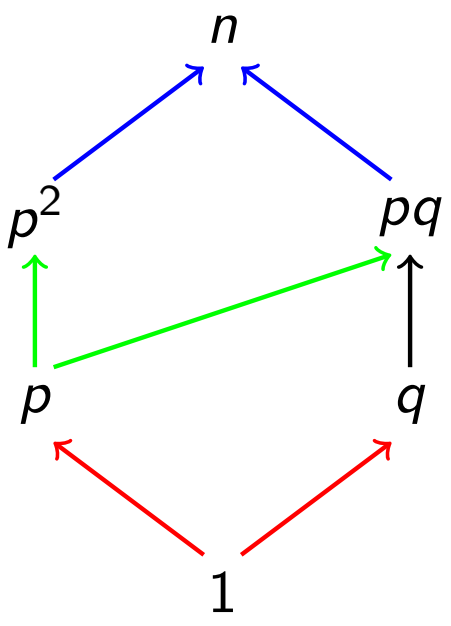
# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes



# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes

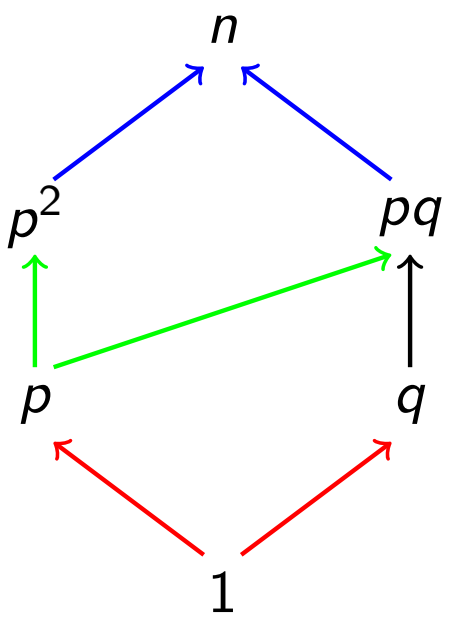


# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes




$\neg p$ no existe

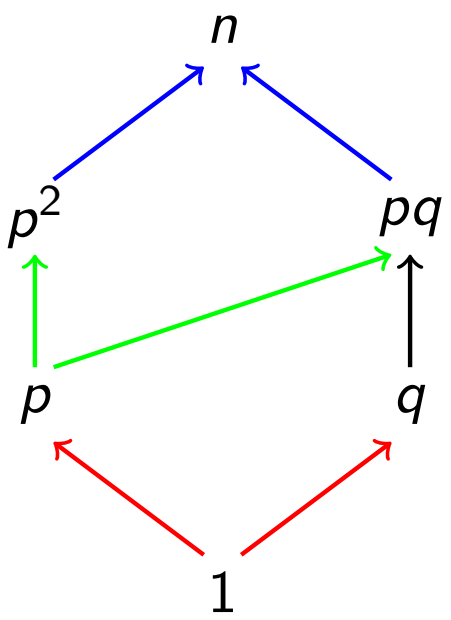
# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes




$\neg p$ no existe

¡$\mathfrak{D}_n$ no es álgebra de Boole!

# El retículo $\mathfrak{D}_n$ para $n = p^2q$; $p, q$ primos diferentes




$\neg p$ no existe

¡$\mathfrak{D}_n$ no es álgebra de Boole!

¿Cómo estudiamos estos casos?

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

**Definición**

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

**Definición**

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

## Definición

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{12}$ se tiene que

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

## Definición

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{12}$ se tiene que
$\neg 1 = 12$

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

## Definición

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{12}$ se tiene que
$\neg 1 = 12$
$\neg 2 = 3$

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

## Definición

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{12}$ se tiene que
$\neg 1 = 12$
$\neg 2 = 3$
$\neg 3 = 4$

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

## Definición

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{12}$ se tiene que

$\neg 1 = 12$

$\neg 2 = 3$

$\neg 3 = 4$

$\neg 4 = 3$

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

## Definición

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{12}$ se tiene que

$\neg 1 = 12$

$\neg 2 = 3$

$\neg 3 = 4$

$\neg 4 = 3$

$\neg 6 = 1$

# Nueva negación

Una manera de hacerlo es redefiniendo la **negación** en los retículos $\mathfrak{D}_n$ :

## Definición

*Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $\mathfrak{D}_n$ es el conjunto de los divisores de $n$ en $\mathbb{Z}^+$. Si $a \in \mathfrak{D}_n$ , se define*

$$\neg a = \bigvee \{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\} = m.c.m\{b \in D_n \mid b \wedge a = 1\}.$$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{12}$ se tiene que

| | |
|---|---|
| $\neg 1 = 12$ | $\neg 4 = 3$ |
| $\neg 2 = 3$ | $\neg 6 = 1$ |
| $\neg 3 = 4$ | $\neg 12 = 1$ |

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que
$\neg 1 = p^2q$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$

$\neg p = q$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$

$\neg p = q$

$\neg q = p^2$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$ $\qquad$ $\neg p^2 = q$

$\neg p = q$

$\neg q = p^2$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$

$\neg p = q$

$\neg q = p^2$

$\neg p^2 = q$

$\neg pq = 1$

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$ $\qquad$ $\neg p^2 = q$

$\neg p = q$ $\qquad$ $\neg pq = 1$

$\neg q = p^2$ $\qquad$ $\neg p^2q = 1$

## Notas

- *El retículo* $\mathfrak{D}_{12}, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$ $\qquad$ $\neg p^2 = q$

$\neg p = q$ $\qquad$ $\neg pq = 1$

$\neg q = p^2$ $\qquad$ $\neg p^2q = 1$

## Notas

- *El retículo* $\mathfrak{D}_{12}, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *El retículo* $\mathfrak{D}_{p^2q}, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$ $\qquad$ $\neg p^2 = q$

$\neg p = q$ $\qquad$ $\neg pq = 1$

$\neg q = p^2$ $\qquad$ $\neg p^2q = 1$

## Notas

- *El retículo* $\mathfrak{D}_{12}, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *El retículo* $\mathfrak{D}_{p^2q}, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *En el penultimo ejemplo* $\neg\neg 2 = \neg 3 = 4 \neq 2$, *por lo tanto la* **lógica** *de* $\mathfrak{D}_{12}$ *no es clásica, es una* **lógica intuicionista**.

## Ejemplo

En $\mathfrak{D}_{p^2q}$ se tiene que

$\neg 1 = p^2q$ $\qquad$ $\neg p^2 = q$

$\neg p = q$ $\qquad$ $\neg pq = 1$

$\neg q = p^2$ $\qquad$ $\neg p^2q = 1$

## Notas

- *El retículo* $\mathfrak{D}_{12}, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *El retículo* $\mathfrak{D}_{p^2q}, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *En el penultimo ejemplo* $\neg\neg 2 = \neg 3 = 4 \neq 2$, *por lo tanto la* **lógica** *de* $\mathfrak{D}_{12}$ *no es clásica, es una* **lógica intuicionista**.
- *En el ejemplo anterior* $\neg\neg p = \neg q = p^2 \neq p$, *por lo tanto la* **lógica** *de* $\mathfrak{D}_{p^2q}$ *no es clásica, es una* **lógica intuicionista**.

# Parte IV

## EJERCICIOS

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

- *Encontrar los* $n \in \mathbb{Z}^+$ *para los cuales* $\mathfrak{D}_n$ *es un álgebra de Boole.*

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

- *Encontrar los* $n \in \mathbb{Z}^+$ *para los cuales* $\mathfrak{D}_n$ *es un álgebra de Boole.*
- *Cada retículo* $(\mathfrak{D}_n, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

- *Encontrar los* $n \in \mathbb{Z}^+$ *para los cuales* $\mathfrak{D}_n$ *es un álgebra de Boole.*
- *Cada retículo* $(\mathfrak{D}_n, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.*

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

- *Encontrar los* $n \in \mathbb{Z}^+$ *para los cuales* $\mathfrak{D}_n$ *es un álgebra de Boole.*
- *Cada retículo* $(\mathfrak{D}_n, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.*
- *Encontrar operaciones binarias en* $\mathbb{Z}^+$ *distintas a la suma, la multiplicación, el m.c.m y el m.c.d.*

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

- *Encontrar los* $n \in \mathbb{Z}^+$ *para los cuales* $\mathfrak{D}_n$ *es un álgebra de Boole.*
- *Cada retículo* $(\mathfrak{D}_n, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ *es un álgebra de Heyting.*
- *Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.*
- *Encontrar operaciones binarias en* $\mathbb{Z}^+$ *distintas a la suma, la multiplicación, el m.c.m y el m.c.d.*
- *Estudiar las lógicas asociadas a los retículos.*

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

- *Encontrar los $n \in \mathbb{Z}^+$ para los cuales $\mathfrak{D}_n$ es un álgebra de Boole.*
- *Cada retículo $(\mathfrak{D}_n, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ es un álgebra de Heyting.*
- *Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.*
- *Encontrar operaciones binarias en $\mathbb{Z}^+$ distintas a la suma, la multiplicación, el m.c.m y el m.c.d.*
- *Estudiar las lógicas asociadas a los retículos.*

**Sugerencia**

Utilice el **Teorema Fundamental de la aritmética**

Es interesante analizar situaciones como las siguientes:

- *Encontrar los $n \in \mathbb{Z}^+$ para los cuales $\mathfrak{D}_n$ es un álgebra de Boole.*
- *Cada retículo $(\mathfrak{D}_n, \wedge, \vee, \neg, 1, n)$ es un álgebra de Heyting.*
- *Toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting.*
- *Encontrar operaciones binarias en $\mathbb{Z}^+$ distintas a la suma, la multiplicación, el m.c.m y el m.c.d.*
- *Estudiar las lógicas asociadas a los retículos.*

**Sugerencia**

Utilice el **Teorema Fundamental de la aritmética**

¿ Qué podemos hacer con estos resultados?

# Parte V

## Retículos y categorías

## Definición

*El orden multiplicativo en $\mathbb{Z}^+$ se define así: para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \prec b$ si y solo si existe $c \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a = bc$.*

**Definición**

*El orden multiplicativo en $\mathbb{Z}^+$ se define así: para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \prec b$ si y solo si existe $c \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a = bc$.*

En lo que sigue, $\mathbb{Z}^+_M$ denota el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \prec)$.

**Definición**

*El orden multiplicativo en $\mathbb{Z}^+$ se define así: para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \prec b$ si y solo si existe $c \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a = bc$.*

En lo que sigue, $\mathbb{Z}^+_M$ denota el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \prec)$.

**Definición**

*El orden de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+$ se define como sigue: para todo $k, n \in \mathbb{Z}^+$, $k \leqslant n$ si y solo si existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = kt$.*

**Definición**

*El orden multiplicativo en $\mathbb{Z}^+$ se define así: para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \prec b$ si y solo si existe $c \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a = bc$.*

En lo que sigue, $\mathbb{Z}^+_M$ denota el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \prec)$.

**Definición**

*El orden de la divisibilidad en $\mathbb{Z}^+$ se define como sigue: para todo $k, n \in \mathbb{Z}^+$, $k \leqslant n$ si y solo si existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = kt$.*

Denotaremos por $\mathbb{Z}^+_D$ al conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, \leqslant)$.

De A. J. Lindenhovius ([4]), tomamos las ideas siguientes

**Definición**

*Sean $(P, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado y $M \subseteq P$. $M$ es un conjunto superior ( up-set) si para cada $x \in M$, $y \in P$ tenemos que $x \leqslant y$ implica que $y \in M$. En forma parecida, $M$ es un conjunto inferior (down-set) si para cada $x \in M$, $y \in P$ tenemos que $y \leqslant x$ implica que $y \in M$.*

De A. J. Lindenhovius ([4]), tomamos las ideas siguientes

## Definición

*Sean* $(P, \leqslant)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $M \subseteq P$. $M$ *es un conjunto superior ( up-set) si para cada* $x \in M$, $y \in P$ *tenemos que* $x \leqslant y$ *implica que* $y \in M$. *En forma parecida,* $M$ *es un conjunto inferior (down-set) si para cada* $x \in M$, $y \in P$ *tenemos que* $y \leqslant x$ *implica que* $y \in M$.
*Para* $x \in P$, *definimos los conjuntos superior e inferior generados por* $x$ *mediante* $\uparrow x = \{y \in P : x \leqslant y\}$; $\downarrow x = \{y \in P : y \leqslant x\}$, *respectivamente.*

De A. J. Lindenhovius ([4]), tomamos las ideas siguientes

## Definición

*Sean* $(P, \leqslant)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $M \subseteq P$. $M$ *es un conjunto superior ( up-set) si para cada* $x \in M$, $y \in P$ *tenemos que* $x \leqslant y$ *implica que* $y \in M$. *En forma parecida,* $M$ *es un conjunto inferior (down-set) si para cada* $x \in M$, $y \in P$ *tenemos que* $y \leqslant x$ *implica que* $y \in M$.
*Para* $x \in P$, *definimos los conjuntos superior e inferior generados por* $x$ *mediante* $\uparrow x = \{y \in P : x \leqslant y\}$; $\downarrow x = \{y \in P : y \leqslant x\}$, *respectivamente.*
*También definimos el conjunto superior generado por un subconjunto* $M$ *de* $P$ *mediante*
$\uparrow M = \{x \in P : m \leqslant x \text{ para algun } m \in M\} = \bigcup_{m \in M} \uparrow m$, *y similarmente, el conjunto inferior generado por* $M$ *es*
$\downarrow M = \bigcup_{m \in M} \downarrow m$.

Denotaremos por $\mathcal{U}(P)$ a la colección de todos los conjuntos superiores de un conjunto parcialmente ordenado $P$, y por $\mathcal{D}(P)$ a la colección de todos sus conjuntos inferiores.

Denotaremos por $\mathcal{U}(P)$ a la colección de todos los conjuntos superiores de un conjunto parcialmente ordenado $P$, y por $\mathcal{D}(P)$ a la colección de todos sus conjuntos inferiores.

En el caso $Z_D^+ := (\mathbb{Z}^+, \leqslant)$, podemos observar que

Denotaremos por $\mathcal{U}(P)$ a la colección de todos los conjuntos superiores de un conjunto parcialmente ordenado $P$, y por $\mathcal{D}(P)$ a la colección de todos sus conjuntos inferiores.

En el caso $Z_D^+ := (\mathbb{Z}^+, \leqslant)$, podemos observar que

- El conjunto inferior generado por $n \in \mathbb{Z}^+$ es $\downarrow n = \{k \in \mathbb{Z}^+ : k \leqslant n\} = \mathfrak{D}_n$, el conjunto de los divisores de $n$.

Denotaremos por $\mathcal{U}(P)$ a la colección de todos los conjuntos superiores de un conjunto parcialmente ordenado $P$, y por $\mathcal{D}(P)$ a la colección de todos sus conjuntos inferiores.

En el caso $Z_D^+ := (\mathbb{Z}^+, \leqslant)$, podemos observar que

- El conjunto inferior generado por $n \in \mathbb{Z}^+$ es $\downarrow n = \{k \in \mathbb{Z}^+ : k \leqslant n\} = \mathfrak{D}_n$, el conjunto de los divisores de $n$.
- Si $M \subseteq \mathbb{Z}^+$ entonces el conjunto inferior generado por $M$ es $\downarrow M = \bigcup_{m \in M} \mathfrak{D}_m$.

Denotaremos por $\mathcal{U}(P)$ a la colección de todos los conjuntos superiores de un conjunto parcialmente ordenado $P$, y por $\mathcal{D}(P)$ a la colección de todos sus conjuntos inferiores.

En el caso $Z_D^+ := (\mathbb{Z}^+, \leqslant)$, podemos observar que

- El conjunto inferior generado por $n \in \mathbb{Z}^+$ es $\downarrow n = \{k \in \mathbb{Z}^+ : k \leqslant n\} = \mathfrak{D}_n$, el conjunto de los divisores de $n$.
- Si $M \subseteq \mathbb{Z}^+$ entonces el conjunto inferior generado por $M$ es $\downarrow M = \bigcup_{m \in M} \mathfrak{D}_m$.
- El conjunto superior generado por $n \in \mathbb{Z}^+$ es $\uparrow n = \{k \in \mathbb{Z}^+ : n \leqslant k\} = \mathfrak{M}_n$, el conjunto de todos los múltiplos de $n$.

Denotaremos por $\mathcal{U}(P)$ a la colección de todos los conjuntos superiores de un conjunto parcialmente ordenado $P$, y por $\mathcal{D}(P)$ a la colección de todos sus conjuntos inferiores.

En el caso $Z_D^+ := (\mathbb{Z}^+, \leqslant)$, podemos observar que

- El conjunto inferior generado por $n \in \mathbb{Z}^+$ es $\downarrow n = \{k \in \mathbb{Z}^+ : k \leqslant n\} = \mathfrak{D}_n$, el conjunto de los divisores de $n$.
- Si $M \subseteq \mathbb{Z}^+$ entonces el conjunto inferior generado por $M$ es $\downarrow M = \bigcup_{m \in M} \mathfrak{D}_m$.
- El conjunto superior generado por $n \in \mathbb{Z}^+$ es $\uparrow n = \{k \in \mathbb{Z}^+ : n \leqslant k\} = \mathfrak{M}_n$, el conjunto de todos los múltiplos de $n$.
- Si $P \subseteq \mathbb{Z}^+$ entonces el conjunto superior generado por $P$ es $\uparrow M = \bigcup_{p \in P} \mathfrak{M}_p$.

## $\mathbb{Z}_D^+$ es una categoría

Utilizando los resultados de S. MacLane y I. Moerdijk (ver [7]), tenemos que un retículo $L$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, posee todos los productos y coproductos binarios.

# $\mathbb{Z}_D^+$ es una categoría

Utilizando los resultados de S. MacLane y I. Moerdijk (ver [7]), tenemos que un retículo $L$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, posee todos los productos y coproductos binarios.
De esta manera, si $m, n, k$ son objetos de $L = \mathbb{Z}_D^+$ entonces $m \leqslant n$ si y solo si existe una única flecha $m \to n$, el coproducto de $m$ y $n$ (i.e. su pushout) es la mínima cota superior, o mínimo común múltiplo,

$$m \vee n = m.c.m\{m, n\}$$

# $\mathbb{Z}_D^+$ es una categoría

Utilizando los resultados de S. MacLane y I. Moerdijk (ver [7]), tenemos que un retículo $L$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, posee todos los productos y coproductos binarios.
De esta manera, si $m, n, k$ son objetos de $L = \mathbb{Z}_D^+$ entonces $m \leqslant n$ si y solo si existe una única flecha $m \to n$, el coproducto de $m$ y $n$ (i.e. su pushout) es la mínima cota superior, o mínimo común múltiplo,

$$m \vee n = m.c.m\{m, n\}$$

y su producto (i.e. su pullback) es la máxima cota inferior, o máximo común divisor,

$$m \wedge n = m.c.d\{m, n\}$$

.

# $\mathbb{Z}_D^+$ es una categoría

Utilizando los resultados de S. MacLane y I. Moerdijk (ver [7]), tenemos que un retículo $L$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, posee todos los productos y coproductos binarios.
De esta manera, si $m, n, k$ son objetos de $L = \mathbb{Z}_D^+$ entonces $m \leqslant n$ si y solo si existe una única flecha $m \to n$, el coproducto de $m$ y $n$ (i.e. su pushout) es la mínima cota superior, o mínimo común múltiplo,

$$m \vee n = m.c.m\{m, n\}$$

y su producto (i.e. su pullback) es la máxima cota inferior, o máximo común divisor,

$$m \wedge n = m.c.d\{m, n\}$$

.

Es claro que $\mathbb{Z}_D^+$ es un retículo distributivo.

Por otra parte, para cada objeto $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$, el conjunto $\mathfrak{D}_n$ de los divisores de $n$ es un álgebra de Heyting:

Por otra parte, para cada objeto $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$, el conjunto $\mathfrak{D}_n$ de los divisores de $n$ es un álgebra de Heyting:
la exponencial $n^k$, para $n, k \in \mathbb{Z}^+$, que se suele denotar por $k \Rightarrow n$; está completamente caracterizada por la adjunción

$$t \leqslant (k \Rightarrow n) \quad \text{si y solo si} \quad m.c.d\{t, k\} \leqslant n. \tag{1}$$

Por otra parte, para cada objeto $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$, el conjunto $\mathfrak{D}_n$ de los divisores de $n$ es un álgebra de Heyting:
la exponencial $n^k$, para $n, k \in \mathbb{Z}^+$, que se suele denotar por $k \Rightarrow n$; está completamente caracterizada por la adjunción

$$t \leqslant (k \Rightarrow n) \quad \text{si y solo si} \quad m.c.d\{t, k\} \leqslant n. \tag{1}$$

En otras palabras, $k \Rightarrow n$ es el mínimo común múltiplo de todos los objetos $t$ que cumplen $m.c.d\{t, k\} \leqslant n$.

Por otra parte, para cada objeto $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$, el conjunto $\mathfrak{D}_n$ de los divisores de $n$ es un álgebra de Heyting:
la exponencial $n^k$, para $n, k \in \mathbb{Z}^+$, que se suele denotar por $k \Rightarrow n$; está completamente caracterizada por la adjunción

$$t \leqslant (k \Rightarrow n) \quad \text{si y solo si} \quad m.c.d\{t, k\} \leqslant n. \tag{1}$$

En otras palabras, $k \Rightarrow n$ es el mínimo común múltiplo de todos los objetos $t$ que cumplen $m.c.d\{t, k\} \leqslant n$.
En cualquier álgebra de Heyting algebra se define la negación de $x$ como

$$\neg x = (x \Rightarrow 0). \tag{2}$$

En consecuencia, para $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$

$$\neg n = (n \Rightarrow 1) = m.c.m\{t \in \mathbb{Z}^+ \mid m.c.d\{t, n\} = 1\}. \qquad (3)$$

En consecuencia, para $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$

$$\neg n = (n \Rightarrow 1) = m.c.m\{t \in \mathbb{Z}^+ \mid m.c.d\{t, n\} = 1\}. \qquad (3)$$

Las propiedades más usuales de la negación son

**Proposición**

*En la álgebra de Heyting $\mathfrak{D}_n$,*

(i) $n \leqslant \neg\neg n$,

En consecuencia, para $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$

$$\neg n = (n \Rightarrow 1) = m.c.m\{t \in \mathbb{Z}^+ \mid m.c.d\{t, n\} = 1\}. \qquad (3)$$

Las propiedades más usuales de la negación son

**Proposición**

*En la álgebra de Heyting $\mathfrak{D}_n$,*

(i) $n \leqslant \neg\neg n$,

(ii) $n \leqslant k$ *implica que* $\neg k \leqslant \neg n$,

En consecuencia, para $n$ in $\mathbb{Z}_D^+$

$$\neg n = (n \Rightarrow 1) = m.c.m\{t \in \mathbb{Z}^+ \mid m.c.d\{t, n\} = 1\}. \qquad (3)$$

Las propiedades más usuales de la negación son

**Proposición**

*En la álgebra de Heyting $\mathfrak{D}_n$,*

(i) $n \leqslant \neg\neg n$,

(ii) $n \leqslant k$ *implica que* $\neg k \leqslant \neg n$,

(iii) $\neg n = \neg\neg\neg n$,

(iv) $\neg\neg\ m.c.d\{n, k\} = m.c.d\{\neg\neg n, \neg\neg k\}$.

**Demostración.**

Ver S. MacLane and I. Moerdijk ([7] pp 53-54) ■

**Demostración.**

Ver S. MacLane and I. Moerdijk ([7] pp 53-54) ■

**Notas**

- *La categoría $\mathbb{Z}_D^+$ es la opuesta de la categoría $\mathbb{Z}_M^+$; realmente son la misma cosa, de igual manera que un locale es lo mismo que un frame (see P. T. Johnstone [3]).*

**Demostración.**

Ver S. MacLane and I. Moerdijk ([7] pp 53-54) ■

**Notas**

- *La categoría $\mathbb{Z}_D^+$ es la opuesta de la categoría $\mathbb{Z}_M^+$; realmente son la misma cosa, de igual manera que un locale es lo mismo que un frame (see P. T. Johnstone [3]).*
- *Utilizando el Teorema fundamental de la Aritmética, es facil deducir que si $n \in \mathbb{Z}^+$ es el producto de un número finito de primos distintos entonces $\mathfrak{D}_n$ es un álgebra de Boole.*

# Parte VI

## Topologías de Grothendieck en $\mathbb{Z}_D^+$

## Definición

*Dado un elemento $k$ en $\mathbb{Z}^+$, un subconjunto $S$ de $\mathbb{Z}^+$ se llama una criba sobre $k$ si $S \in \mathcal{D}(\mathfrak{D}_k)$.*

## Definición

*Dado un elemento $k$ en $\mathbb{Z}^+$, un subconjunto $S$ de $\mathbb{Z}^+$ se llama una criba sobre $k$ si $S \in \mathcal{D}(\mathfrak{D}_k)$.*

## Definición

*Una topología de Grothendieck en la categoría $\mathbb{Z}_D^+$ es una función $J$ que asigna a cada elemento $n$ de $\mathbb{Z}^+$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathbb{Z}_D^+$, de manera que*

## Definición

*Dado un elemento $k$ en $\mathbb{Z}^+$, un subconjunto $S$ de $\mathbb{Z}^+$ se llama una criba sobre $k$ si $S \in \mathcal{D}(\mathfrak{D}_k)$.*

## Definición

*Una topología de Grothendieck en la categoría $\mathbb{Z}_D^+$ es una función $J$ que asigna a cada elemento $n$ de $\mathbb{Z}^+$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathbb{Z}_D^+$, de manera que*

(i) *La criba maximal $\mathfrak{D}_n$ (el conjunto de los divisores de $n$) está en $J(n)$;*

## Definición

*Dado un elemento $k$ en $\mathbb{Z}^+$, un subconjunto $S$ de $\mathbb{Z}^+$ se llama una criba sobre $k$ si $S \in \mathcal{D}(\mathfrak{D}_k)$.*

## Definición

*Una topología de Grothendieck en la categoría $\mathbb{Z}_D^+$ es una función $J$ que asigna a cada elemento $n$ de $\mathbb{Z}^+$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathbb{Z}_D^+$, de manera que*

(i) *La criba maximal $\mathfrak{D}_n$ (el conjunto de los divisores de $n$) está en $J(n)$;*

(ii) *(Axioma de estabilidad) si $S \in J(n)$ y $k \leqslant n$ entonces $S \cap \mathfrak{D}_k$ está en $J(k)$;*

## Definición

*Dado un elemento $k$ en $\mathbb{Z}^+$, un subconjunto $S$ de $\mathbb{Z}^+$ se llama una criba sobre $k$ si $S \in \mathcal{D}(\mathfrak{D}_k)$.*

## Definición

*Una topología de Grothendieck en la categoría $\mathbb{Z}_D^+$ es una función $J$ que asigna a cada elemento $n$ de $\mathbb{Z}^+$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathbb{Z}_D^+$, de manera que*

(i) *La criba maximal $\mathfrak{D}_n$ (el conjunto de los divisores de $n$) está en $J(n)$;*

(ii) *(Axioma de estabilidad) si $S \in J(n)$ y $k \leqslant n$ entonces $S \cap \mathfrak{D}_k$ está en $J(k)$;*

(iii) *(Axioma de transitividad) si $S \in J(n)$ y $R$ es una criba sobre $n$ tal que $R \cap \mathfrak{D}_k$ está en $J(k)$ para cada $k \in S$, entonces $R \in J(n)$.*

## Ejemplo

- *La topología de Grothendieck trivial en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{tri}(n) = \{\mathfrak{D}_n\}$.

## Ejemplo

- *La topología de Grothendieck trivial en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{tri}(n) = \{\mathfrak{D}_n\}$.
- *La topología de Grothendieck discreta en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{dis}(n) = \mathcal{D}(\mathfrak{D}_n)$.

## Ejemplo

- *La topología de Grothendieck trivial en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{tri}(n) = \{\mathfrak{D}_n\}$.
- *La topología de Grothendieck discreta en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{dis}(n) = \mathcal{D}(\mathfrak{D}_n)$.
- *La topología de Grothendieck atómica en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{atom}(n) = \mathcal{D}(\mathfrak{D}_n) - \{\emptyset\}$.

## Ejemplo

- *La topología de Grothendieck trivial en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{tri}(n) = \{\mathfrak{D}_n\}$.
- *La topología de Grothendieck discreta en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{dis}(n) = \mathcal{D}(\mathfrak{D}_n)$.
- *La topología de Grothendieck atómica en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{atom}(n) = \mathcal{D}(\mathfrak{D}_n) - \{\emptyset\}$.
- *Un subconjunto* $D \subseteq \mathfrak{D}_n$ *es inferiormente denso si para cada* $m \leqslant n$ *existe* $k \leqslant m$ *con* $k \in D$. *La topología densa en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J(n) = \{D \mid k \leqslant n \text{ para todo } k \in D, \text{ y } D \text{ es inferiormente densa respecto a } n\}$

## Ejemplo

- *La topología de Grothendieck trivial en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{tri}(n) = \{\mathfrak{D}_n\}$.
- *La topología de Grothendieck discreta en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{dis}(n) = \mathcal{D}(\mathfrak{D}_n)$.
- *La topología de Grothendieck atómica en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J_{atom}(n) = \mathcal{D}(\mathfrak{D}_n) - \{\emptyset\}$.
- *Un subconjunto* $D \subseteq \mathfrak{D}_n$ *es inferiormente denso si para cada* $m \leqslant n$ *existe* $k \leqslant m$ *con* $k \in D$. *La topología densa en* $\mathbb{Z}_D^+$ *es* $J(n) = \{D \mid k \leqslant n \text{ para todo } k \in D, \text{ y } D \text{ es inferiormente densa respecto a } n\}$

## Definición

*El par* $(\mathbb{Z}_D^+, J)$, *donde* $J$ *es una topología de Grothendieck en* $\mathbb{Z}_D^+$, *se llama un sitio.*

## Definición

*Sea* $F : (\mathbb{Z}_D^+)^{op} \longrightarrow$ *Sets un functor (un functor contravariante hacia Sets se llama un prehaz). Sean* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $S \in J(n)$. *Entonces una familia* $\langle a_k \rangle_{k \in S}$ *en* $\prod_{k \in S} F(k)$ *se llama una "matching family" para el cubrimiento* $S$ *con elementos de* $F$ *si*

## Definición

*Sea* $F : (\mathbb{Z}_D^+)^{op} \longrightarrow$ *Sets un functor (un functor contravariante hacia Sets se llama un prehaz). Sean* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $S \in J(n)$. *Entonces una familia* $\langle a_k \rangle_{k \in S}$ *en* $\prod_{k \in S} F(k)$ *se llama una "matching family" para el cubrimiento* $S$ *con elementos de* $F$ *si*

$$F(a_k) = a_t \tag{4}$$

*para cada* $k, t \in S$ *tal que* $t \leqslant k$.

## Definición

*Sea* $F : (\mathbb{Z}_D^+)^{op} \longrightarrow$ *Sets un functor (un functor contravariante hacia Sets se llama un prehaz). Sean* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $S \in J(n)$. *Entonces una familia* $\langle a_k \rangle_{k \in S}$ *en* $\prod_{k \in S} F(k)$ *se llama una "matching family" para el cubrimiento* $S$ *con elementos de* $F$ *si*

$$F(a_k) = a_t \tag{4}$$

*para cada* $k, t \in S$ *tal que* $t \leqslant k$.
*Un elemento* $a \in F(n)$ *tal que* $F(a) = a_k$ *para cada* $k \in S$ *se llama una amalgamación.*

## Definición

*Sea $F : (\mathbb{Z}_D^+)^{op} \longrightarrow$ Sets un functor (un functor contravariante hacia Sets se llama un prehaz). Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $S \in J(n)$. Entonces una familia $\langle a_k \rangle_{k \in S}$ en $\prod_{k \in S} F(k)$ se llama una "matching family" para el cubrimiento $S$ con elementos de $F$ si*

$$F(a_k) = a_t \tag{4}$$

*para cada $k, t \in S$ tal que $t \leqslant k$.*
*Un elemento $a \in F(n)$ tal que $F(a) = a_k$ para cada $k \in S$ se llama una amalgamación.*
*Decimos que $F$ es un $J$-haz si para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, para cada $S \in J(n)$ y para cada "matching family" $\langle a_k \rangle_{k \in S}$ existe una única amalgamación $a \in F(n)$.*

$Sh(\mathbb{Z}_D^+, J)$ denota la categoría de los haces $F$ de conjuntos en el sitio $(\mathbb{Z}_D^+, J)$.

$Sh(\mathbb{Z}_D^+, J)$ denota la categoría de los haces $F$ de conjuntos en el sitio $(\mathbb{Z}_D^+, J)$.

**Proposición**

*Para el sitio $(\mathbb{Z}_D^+, J_{tri})$ tenemos que $Sh(\mathbb{Z}_D^+) \cong Sets^{(\mathbb{Z}_D^+)^{op}}$*

$Sh(\mathbb{Z}_D^+, J)$ denota la categoría de los haces $F$ de conjuntos en el sitio $(\mathbb{Z}_D^+, J)$.

**Proposición**

*Para el sitio $(\mathbb{Z}_D^+, J_{tri})$ tenemos que $Sh(\mathbb{Z}_D^+) \cong Sets^{(\mathbb{Z}_D^+)^{op}}$*

**Proposición**

*La categoría $Sh(\mathbb{Z}_D^+)$ es equivalente a 1 (el objeto terminal en $Sets^{(\mathbb{Z}_D^+)^{op}}$) para el sitio $(\mathbb{Z}_D^+, J_{dis})$ .*

Una de las propiedades más importantes en categorías es la existencia de un subobjeto clasificador $\Omega$. Veamos que existe un tal subobjeto clasificador para haces en los sitios estudiados en la sección anterior.

## Definición

*Definimos* $\Omega : (\mathbb{Z}_D^+)^{op} \longrightarrow Sets$ *para objetos por*

$$\Omega(n) = \{S \mid S \text{ es una criba en } n \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}^+\}, \tag{5}$$

*y para flechas* $g : k \to n$ *por*

$$(-).g : \Omega(n) \to \Omega(k) \qquad S.g = \{h \mid g \circ h \in S\}$$

## Proposición

*El prehaz* $\Omega$ *de (5) es un haz.*

Observe que la criba maximal sobre $n$, $t_n = \mathfrak{D}_n$ es evidentemente cerrada y que para $k \leqslant n$ en $\mathbb{Z}^+$, se tiene que $t_k = \mathfrak{D}_k$. Por lo tanto $n \mapsto t_n$ define una transformación natural

$$true : 1 \longrightarrow \Omega. \tag{6}$$

De esta manera

**Proposición**

*El haz $\Omega$, junto con la aplicación true de (6), es un subobjeto clasificador de la categoría $Sh(\mathbb{Z}^+, J)$.*

En conclusión tenemos que

$Sh(\mathbb{Z}_D^+, J)$ es un topos elemental.

# Parte VII

## Algunas categorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

# Puntos periódicos de una función

Recordemos los procesos iterativos de los sistemas dinámicos discretos: sea $f : X \to X$ una función definida en un conjunto $X$. El punto $x \in X$ es un punto fijo para $f$ si $f(x) = x$; el punto $x \in X$ es un punto periódico de período $n$ si $f^n(x) = x$ ($f^n = f \circ f^{n-1},\ n \geq 1$). Denotamos con $Per_n(f)$ al conjunto de los puntos periódicos de período $n$ y al conjunto de todos los puntos periódicos de $f$ por $Per(f)$.

# Puntos periódicos de una función

Recordemos los procesos iterativos de los sistemas dinámicos discretos: sea $f : X \to X$ una función definida en un conjunto $X$. El punto $x \in X$ es un punto fijo para $f$ si $f(x) = x$; el punto $x \in X$ es un punto periódico de período $n$ si $f^n(x) = x$ ($f^n = f \circ f^{n-1},\ n \geq 1$). Denotamos con $Per_n(f)$ al conjunto de los puntos periódicos de período $n$ y al conjunto de todos los puntos periódicos de $f$ por $Per(f)$.
Es facil mostrar que $Per_k(f) \subseteq Per_n(f)$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$. De esta manera, decimos que $Per_k(f) \leqslant Per_n(f)$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$.

Obtenemos que $(Per(f), \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios. Entonces, si $Per_m(f), Per_n(f), Per_k(f)$ son objetos de $Per(f)$ entonces $Per_m(f) \leqslant Per_n(f)$ si y solo si existe una única flecha $Per_m(f) \to Per_n(f)$,

Obtenemos que $(Per(f), \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios. Entonces, si $Per_m(f), Per_n(f), Per_k(f)$ son objetos de $Per(f)$ entonces $Per_m(f) \leqslant Per_n(f)$ si y solo si existe una única flecha $Per_m(f) \to Per_n(f)$,
el coproducto de $Per_m(f)$ y $Per_n(f)$ es $Per_k(f)$, donde $k$=m.c.m{m,n}, es decir $Per_m(f) \vee Per_n(f) = Per_{m.c.m\{m,n\}}(f)$

Obtenemos que $(Per(f), \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios. Entonces, si $Per_m(f), Per_n(f), Per_k(f)$ son objetos de $Per(f)$ entonces $Per_m(f) \leqslant Per_n(f)$ si y solo si existe una única flecha $Per_m(f) \to Per_n(f)$,
el coproducto de $Per_m(f)$ y $Per_n(f)$ es $Per_k(f)$, donde $k$=m.c.m{m,n}, es decir $Per_m(f) \vee Per_n(f) = Per_{m.c.m\{m,n\}}(f)$ y el producto es $Per_m(f) \wedge Per_n(f) = Per_{m.c.d\{m,n\}}(f)$.

# El conjunto parcialmente ordenado $(Per(f), \leqslant)$

$Per_1(f)$

# El conjunto parcialmente ordenado $(Per(f), \leqslant)$

$$Per_2(f)$$

$$Per_3(f)$$

$$Per_1(f)$$

$$Per_5(f)$$

$$Per_7(f)$$

$$\vdots$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(Per(f), \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & Per_2(f) \\
 & Per_3(f) \\
Per_1(f) \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
 & Per_5(f) \\
 & Per_7(f) \\
 & \vdots
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(Per(f), \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & Per_2(f) & Per_4(f) \\
 & & Per_6(f) \\
 & Per_3(f) & Per_9(f) \\
 & & \vdots \\
Per_1(f) \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \\
 & Per_5(f) & \\
 & & \\
 & Per_7(f) & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(Per(f), \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & Per_2(f) \arrow[r] \arrow[dr] & Per_4(f) \\
 & & Per_6(f) \\
 & Per_3(f) \arrow[r] & Per_9(f) \\
 & & \vdots \\
Per_1(f) \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \\
 & Per_5(f) & \\
 & Per_7(f) & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(Per(f), \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & Per_2(f) \arrow[r] \arrow[dr] & Per_4(f) & Per_8(f) & \cdots \\
 & & Per_6(f) & Per_{10}(f) & \\
 & Per_3(f) \arrow[r] & Per_9(f) & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
Per_1(f) \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & \\
 & Per_5(f) & & & \\
 & Per_7(f) & & & \\
 & \vdots & & &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(Per(f), \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & Per_2(f) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[drr] & Per_4(f) \arrow[r] & Per_8(f) & \cdots \\
 & & Per_6(f) & Per_{10}(f) & \\
 & Per_3(f) \arrow[r] & Per_9(f) & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
Per_1(f) \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & \\
 & Per_5(f) \arrow[uurr] & & & \\
 & Per_7(f) & & & \\
 & \vdots & & &
\end{tikzcd}
$$

Claramente $Per(f)$ es un retículo distributivo.
Por consiguiente,

**Proposición**

*Las categorías $Per(f)$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

# Raices de la unidad

Consideremos ahora las raices de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Recuerde que un elemento $z$ de $\mathbb{C}$ es una raiz de la unidad si existe un número entero $n \geqslant 1$ tal que $z^n = 1$. Existen a lo más $n$ de tales raices, las que forman un grupo cíclico $R_n$, denotamos mediante el símbolo $\mathcal{R}$ al conjunto de tales grupos $\{R_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

# Raices de la unidad

Consideremos ahora las raices de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Recuerde que un elemento $z$ de $\mathbb{C}$ es una raiz de la unidad si existe un número entero $n \geqslant 1$ tal que $z^n = 1$.
Existen a lo más $n$ de tales raices, las que forman un grupo cíclico $R_n$, denotamos mediante el símbolo $\mathcal{R}$ al conjunto de tales grupos $\{R_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$
Se sabe que dados dos de tales grupos $R_k$ y $R_n$, $R_k$ es un subgrupo de $R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$.

# Raices de la unidad

Consideremos ahora las raices de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Recuerde que un elemento $z$ de $\mathbb{C}$ es una raiz de la unidad si existe un número entero $n \geqslant 1$ tal que $z^n = 1$. Existen a lo más $n$ de tales raices, las que forman un grupo cíclico $R_n$, denotamos mediante el símbolo $\mathcal{R}$ al conjunto de tales grupos $\{R_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

Se sabe que dados dos de tales grupos $R_k$ y $R_n$, $R_k$ es un subgrupo de $R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$. Por lo tanto, diremos que $R_k \leqslant R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{R}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios.

# Raices de la unidad

Consideremos ahora las raices de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Recuerde que un elemento $z$ de $\mathbb{C}$ es una raiz de la unidad si existe un número entero $n \geqslant 1$ tal que $z^n = 1$. Existen a lo más $n$ de tales raices, las que forman un grupo cíclico $R_n$, denotamos mediante el símbolo $\mathcal{R}$ al conjunto de tales grupos $\{R_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

Se sabe que dados dos de tales grupos $R_k$ y $R_n$, $R_k$ es un subgrupo de $R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$. Por lo tanto, diremos que $R_k \leqslant R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{R}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios. En este caso, si $R_m, R_n, R_k$ son objetos de $\mathcal{R}$ entonces $R_m \leqslant R_n$ si y solo si existe una única flecha $R_m \to R_n$,

# Raices de la unidad

Consideremos ahora las raices de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Recuerde que un elemento $z$ de $\mathbb{C}$ es una raiz de la unidad si existe un número entero $n \geqslant 1$ tal que $z^n = 1$. Existen a lo más $n$ de tales raices, las que forman un grupo cíclico $R_n$, denotamos mediante el símbolo $\mathcal{R}$ al conjunto de tales grupos $\{R_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

Se sabe que dados dos de tales grupos $R_k$ y $R_n$, $R_k$ es un subgrupo de $R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$. Por lo tanto, diremos que $R_k \leqslant R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{R}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios. En este caso, si $R_m, R_n, R_k$ son objetos de $\mathcal{R}$ entonces $R_m \leqslant R_n$ si y solo si existe una única flecha $R_m \to R_n$,

el coproducto de $R_m$ y $R_n$ es $R_k$, donde $k$=m.c.m{m,n}, es decir, $R_m \vee R_n = R_{m.c.m\{m,n\}}$

# Raices de la unidad

Consideremos ahora las raices de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Recuerde que un elemento $z$ de $\mathbb{C}$ es una raiz de la unidad si existe un número entero $n \geqslant 1$ tal que $z^n = 1$. Existen a lo más $n$ de tales raices, las que forman un grupo cíclico $R_n$, denotamos mediante el símbolo $\mathcal{R}$ al conjunto de tales grupos $\{R_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

Se sabe que dados dos de tales grupos $R_k$ y $R_n$, $R_k$ es un subgrupo de $R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$. Por lo tanto, diremos que $R_k \leqslant R_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{R}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios. En este caso, si $R_m, R_n, R_k$ son objetos de $\mathcal{R}$ entonces $R_m \leqslant R_n$ si y solo si existe una única flecha $R_m \to R_n$, el coproducto de $R_m$ y $R_n$ es $R_k$, donde $k$=m.c.m{m,n}, es decir, $R_m \vee R_n = R_{m.c.m\{m,n\}}$y el producto es $R_m \wedge R_n = R_{m.c.d\{m,n\}}$.

También tenemos que $\mathcal{R}$ es un retículo distributivo.

También tenemos que $\mathcal{R}$ es un retículo distributivo.En consecuencia,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{R}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

También tenemos que $\mathcal{R}$ es un retículo distributivo.En consecuencia,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{R}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

**Observación**

*En el plano complejo, las n raices de la unidad corresponden a los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria.*

También tenemos que $\mathcal{R}$ es un retículo distributivo.En consecuencia,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{R}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

**Observación**

*En el plano complejo, las n raices de la unidad corresponden a los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria.*
*Los vertices sucesivos se obtienen incrementando el argumento del vértice precedente en una cantidad igual a $2\pi/n$.*

También tenemos que $\mathcal{R}$ es un retículo distributivo.En consecuencia,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{R}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

**Observación**

*En el plano complejo, las n raices de la unidad corresponden a los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria.*
*Los vertices sucesivos se obtienen incrementando el argumento del vértice precedente en una cantidad igual a $2\pi/n$.*
*Indudablemente la colección de dichos polígonos constituyen otra categoría equivalente a $\mathbb{Z}_D^+$.*

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{R}, \leqslant)$

$R_1$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{R}, \leqslant)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & R_2 & \\
 & R_3 & \\
R_1 & & \\
 & R_5 & \\
 & R_7 & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{R}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & R_2 \\
 & R_3 \\
R_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
 & R_5 \\
 & R_7 \\
 & \vdots
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{R}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & R_2 & R_4 \\
 & & R_6 \\
 & R_3 & R_9 \\
 & & \vdots \\
R_1 \arrow[uurr] \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[ddrr] & & \\
 & R_5 & \\
 & R_7 & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{R}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & R_2 \arrow[r] \arrow[dr] & R_4 \\
 & & R_6 \\
 & R_3 \arrow[r] & R_9 \\
 & & \vdots \\
R_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \\
 & R_5 & \\
 & R_7 & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{R}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & R_2 \arrow[r] \arrow[dr] & R_4 & R_8 & \cdots \\
 & & R_6 & R_{10} & \\
R_1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & R_3 \arrow[r] & R_9 & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
 & R_5 & & & \\
 & R_7 & & & \\
 & \vdots & & &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{R}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & R_2 \arrow[r] \arrow[dr] & R_4 \arrow[r] & R_8 & \cdots \\
 & & R_6 & R_{10} & \\
 & R_3 \arrow[r] & R_9 & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
R_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & \\
 & R_5 \arrow[uuurr] & & & \\
 & R_7 & & & \\
 & \vdots & & &
\end{tikzcd}
$$

# Soluciones de una ecuación diferencial

Sea $I$ un intervalo abierto de la recta real y sea $\mathcal{C}^n(I)$ el conjunto de todas las funciones de valor complejo que tienen derivadas contínuas de orden $n$ en $I$.

# Soluciones de una ecuación diferencial

Sea $I$ un intervalo abierto de la recta real y sea $\mathcal{C}^n(I)$ el conjunto de todas las funciones de valor complejo que tienen derivadas contínuas de orden $n$ en $I$. Estamos interesados en encontrar todas las soluciones en $\mathcal{C}^n(I)$ de la ecuación diferencial

# Soluciones de una ecuación diferencial

Sea $I$ un intervalo abierto de la recta real y sea $\mathcal{C}^n(I)$ el conjunto de todas las funciones de valor complejo que tienen derivadas contínuas de orden $n$ en $I$. Estamos interesados en encontrar todas las soluciones en $\mathcal{C}^n(I)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{d^n f}{dt} = f, \qquad f \in \mathcal{C}^n(I) \tag{7}$$

# Soluciones de una ecuación diferencial

Sea $I$ un intervalo abierto de la recta real y sea $\mathcal{C}^n(I)$ el conjunto de todas las funciones de valor complejo que tienen derivadas contínuas de orden $n$ en $I$. Estamos interesados en encontrar todas las soluciones en $\mathcal{C}^n(I)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{d^n f}{dt} = f, \qquad f \in \mathcal{C}^n(I) \tag{7}$$

o, escrita en otra forma

$$\mathfrak{D}^n f = f, \qquad f \in \mathcal{C}^n(I). \tag{8}$$

# Soluciones de una ecuación diferencial

Sea $I$ un intervalo abierto de la recta real y sea $\mathcal{C}^n(I)$ el conjunto de todas las funciones de valor complejo que tienen derivadas contínuas de orden $n$ en $I$. Estamos interesados en encontrar todas las soluciones en $\mathcal{C}^n(I)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{d^n f}{dt} = f, \qquad f \in \mathcal{C}^n(I) \tag{7}$$

o, escrita en otra forma

$$\mathfrak{D}^n f = f, \qquad f \in \mathcal{C}^n(I). \tag{8}$$

Es decir, estamos interesados en encontrar los puntos periódicos del operador diferencial $\mathfrak{D}$.

Para $n = 1$, tenenmos que $\mathfrak{D}f = f$ si y solo si $f(t) = ke^t, \quad k \in \mathbb{R}$. De esta manera $V_1 = \langle e^t \rangle = \{ke^t, \mid k \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}f = f$.

Para $n = 1$, tenenmos que $\mathfrak{D}f = f$ si y solo si $f(t) = ke^t, \quad k \in \mathbb{R}$. De esta manera $V_1 = \langle e^t \rangle = \{ke^t, \mid k \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}f = f$.
En general, si $f(t) = e^{\omega t}$ entonces $\mathfrak{D}^n f(t) = \omega^n e^{\omega t}$; en consecuencia, $\mathfrak{D}^n f(t) = f(t)$ si y solo si $\omega^n = 1$. i.e. $\omega$ es una raiz de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y por lo tanto, $V_n = \langle e^t, e^{\omega t} \cdots, e^{\omega^{(n-1)} t} \rangle$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}^n f = f$. Denotaremos por $\mathcal{V}$ a la familia de todos los espacios vectoriales $\{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

Para $n = 1$, tenenmos que $\mathfrak{D}f = f$ si y solo si $f(t) = ke^t, \quad k \in \mathbb{R}$. De esta manera $V_1 = \langle e^t \rangle = \{ke^t, \mid k \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}f = f$.
En general, si $f(t) = e^{\omega t}$ entonces $\mathfrak{D}^n f(t) = \omega^n e^{\omega t}$; en consecuencia, $\mathfrak{D}^n f(t) = f(t)$ si y solo si $\omega^n = 1$. i.e. $\omega$ es una raiz de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y por lo tanto, $V_n = \langle e^t, e^{\omega t} \cdots, e^{\omega^{(n-1)} t} \rangle$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}^n f = f$. Denotaremos por $\mathcal{V}$ a la familia de todos los espacios vectoriales $\{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$
Es claro que $V_k$ es un subespacio de $V_n$ si y solo si $k \in \mathfrak{D}_n$. Por esta razón decimos que $V_k \leqslant V_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{V}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios.

Para $n = 1$, tenenmos que $\mathfrak{D}f = f$ si y solo si $f(t) = ke^t, \quad k \in \mathbb{R}$. De esta manera $V_1 = \langle e^t \rangle = \{ke^t, \mid k \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}f = f$.
En general, si $f(t) = e^{\omega t}$ entonces $\mathfrak{D}^n f(t) = \omega^n e^{\omega t}$; en consecuencia, $\mathfrak{D}^n f(t) = f(t)$ si y solo si $\omega^n = 1$. i.e. $\omega$ es una raiz de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y por lo tanto, $V_n = \langle e^t, e^{\omega t} \cdots, e^{\omega^{(n-1)} t} \rangle$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}^n f = f$. Denotaremos por $\mathcal{V}$ a la familia de todos los espacios vectoriales $\{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$
Es claro que $V_k$ es un subespacio de $V_n$ si y solo si $k \in \mathfrak{D}_n$. Por esta razón decimos que $V_k \leqslant V_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{V}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios.
En este caso, si $V_m, V_n, V_k$ son objetos de $\mathcal{V}$ entonces $V_m \leqslant V_n$ si y solo si existe una única flecha $V_m \to V_n$,

Para $n = 1$, tenenmos que $\mathfrak{D}f = f$ si y solo si $f(t) = ke^t, \quad k \in \mathbb{R}$. De esta manera $V_1 = \langle e^t \rangle = \{ke^t, \mid k \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}f = f$.
En general, si $f(t) = e^{\omega t}$ entonces $\mathfrak{D}^n f(t) = \omega^n e^{\omega t}$; en consecuencia, $\mathfrak{D}^n f(t) = f(t)$ si y solo si $\omega^n = 1$. i.e. $\omega$ es una raiz de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y por lo tanto, $V_n = \langle e^t, e^{\omega t} \cdots, e^{\omega^{(n-1)} t} \rangle$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}^n f = f$. Denotaremos por $\mathcal{V}$ a la familia de todos los espacios vectoriales $\{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$
Es claro que $V_k$ es un subespacio de $V_n$ si y solo si $k \in \mathfrak{D}_n$. Por esta razón decimos que $V_k \leqslant V_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{V}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios.
En este caso, si $V_m, V_n, V_k$ son objetos de $\mathcal{V}$ entonces $V_m \leqslant V_n$ si y solo si existe una única flecha $V_m \to V_n$,El coproducto de $V_m$ y $V_n$ es $V_m \vee V_n = V_{m.c.m\{m,n\}}$

Para $n = 1$, tenenmos que $\mathfrak{D}f = f$ si y solo si $f(t) = ke^t, \quad k \in \mathbb{R}$. De esta manera $V_1 = \langle e^t \rangle = \{ke^t, \mid k \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}f = f$.
En general, si $f(t) = e^{\omega t}$ entonces $\mathfrak{D}^n f(t) = \omega^n e^{\omega t}$; en consecuencia, $\mathfrak{D}^n f(t) = f(t)$ si y solo si $\omega^n = 1$. i.e. $\omega$ es una raiz de la unidad en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, y por lo tanto, $V_n = \langle e^t, e^{\omega t} \cdots, e^{\omega^{(n-1)} t} \rangle$ es el espacio vectorial real de todas las soluciones de $\mathfrak{D}^n f = f$. Denotaremos por $\mathcal{V}$ a la familia de todos los espacios vectoriales $\{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$
Es claro que $V_k$ es un subespacio de $V_n$ si y solo si $k \in \mathfrak{D}_n$. Por esta razón decimos que $V_k \leqslant V_n$ si y solo si $k$ es un divisor de $n$ y obtenemos que $(\mathcal{V}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado que, considerado como una categoría, tiene todos los productos y coproductos binarios.
En este caso, si $V_m, V_n, V_k$ son objetos de $\mathcal{V}$ entonces $V_m \leqslant V_n$ si y solo si existe una única flecha $V_m \to V_n$,El coproducto de $V_m$ y $V_n$ es $V_m \vee V_n = V_{m.c.m\{m,n\}}$ y el producto es $V_m \wedge V_n = V_{m.c.d\{m,n\}}$.

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{V}, \leqslant)$

$V_1$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{V}, \leqslant)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & V_2 & \\
 & V_3 & \\
V_1 & & \\
 & V_5 & \\
 & V_7 & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{V}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & V_2 \\
 & V_3 \\
V_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
 & V_5 \\
 & V_7 \\
 & \vdots
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{V}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & V_2 & V_4 \\
 & & V_6 \\
 & V_3 & V_9 \\
 & & \vdots \\
V_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \\
 & V_5 & \\
 & V_7 & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

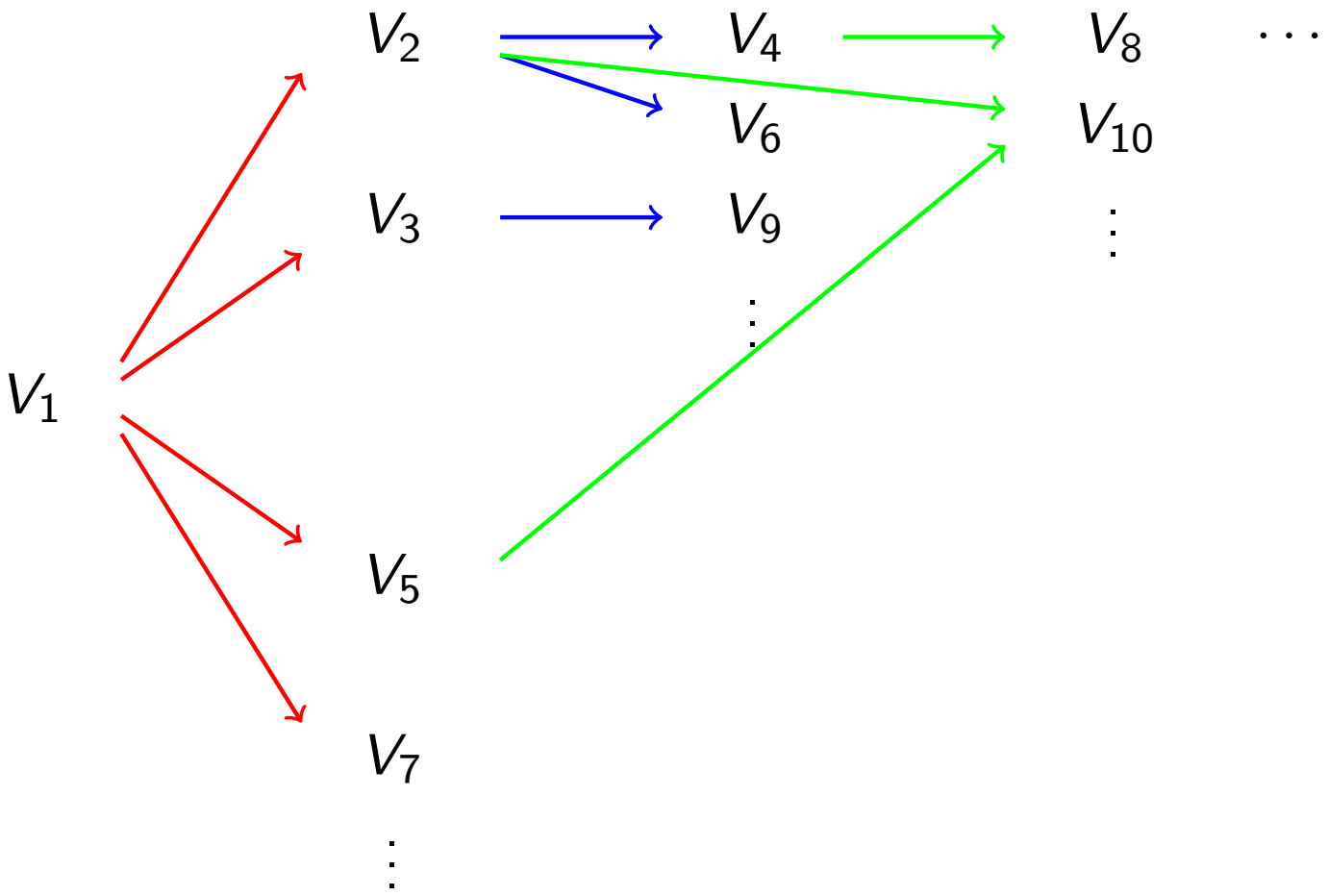
# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{V}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & V_2 \arrow[r] \arrow[dr] & V_4 \\
 & & V_6 \\
 & V_3 \arrow[r] & V_9 \\
 & & \vdots \\
V_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \\
 & V_5 & \\
 & V_7 & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{V}, \leqslant)$

$$
\begin{tikzcd}
 & V_2 \arrow[r] \arrow[dr] & V_4 & V_8 & \cdots \\
 & & V_6 & V_{10} & \\
 & V_3 \arrow[r] & V_9 & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
V_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & \\
 & V_5 & & & \\
 & V_7 & & & \\
 & \vdots & & &
\end{tikzcd}
$$

# El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{V}, \leqslant)$



Por consiguiente,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{V}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

Por consiguiente,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{V}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

Note, por ejemplo, que una topología de Grothendieck en la categoría $\mathcal{V}$ es una función $J$ que asigna a cada objeto $V_n$ de $\mathcal{V}$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathcal{V}$, de tal manera que

Por consiguiente,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{V}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

Note, por ejemplo, que una topología de Grothendieck en la categoría $\mathcal{V}$ es una función $J$ que asigna a cada objeto $V_n$ de $\mathcal{V}$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathcal{V}$, de tal manera que

(i) La criba maximal $\downarrow V_n = \{V_k \mid k \in \mathfrak{D}_n\}$ está en $J(n)$;

Por consiguiente,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{V}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

Note, por ejemplo, que una topología de Grothendieck en la categoría $\mathcal{V}$ es una función $J$ que asigna a cada objeto $V_n$ de $\mathcal{V}$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathcal{V}$, de tal manera que

(i) La criba maximal $\downarrow V_n = \{V_k \mid k \in \mathfrak{D}_n\}$ está en $J(n)$;

(ii) (axioma de estabilidad) si $S \in J(n)$ y $V_k \leqslant V_n$ entonces $S \cap \downarrow V_k$ está en $J(k)$;

Por consiguiente,

**Proposición**

*Las categorías $\mathcal{V}$ y $\mathbb{Z}_D^+$ son equivalentes.*

Note, por ejemplo, que una topología de Grothendieck en la categoría $\mathcal{V}$ es una función $J$ que asigna a cada objeto $V_n$ de $\mathcal{V}$ una colección $J(n)$ de cribas en $\mathcal{V}$, de tal manera que

(i) La criba maximal $\downarrow V_n = \{V_k \mid k \in \mathfrak{D}_n\}$ está en $J(n)$;

(ii) (axioma de estabilidad) si $S \in J(n)$ y $V_k \leqslant V_n$ entonces $S \cap \downarrow V_k$ está en $J(k)$;

(iii) (axioma de transitividad) si $S \in J(n)$ y $R$ es una criba en $V_n$ tal que $R \cap \downarrow V_k$ está en $J(k)$ para cada $k \in S$, entonces $R \in J(n)$.

# Parte VIII

## Algunas subcategorías de $\mathbb{Z}_D^+$

# Subcategorías finitas de $\mathbb{Z}_D^+$

$\mathfrak{D}_1$

# Subcategorías finitas de $\mathbb{Z}_D^+$

$\mathfrak{D}_2$

$\mathfrak{D}_3$

$\mathfrak{D}_1$

$\mathfrak{D}_5$

$\mathfrak{D}_7$

$\vdots$

# Subcategorías finitas de $\mathbb{Z}_D^+$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D}_2 \\
 & \mathfrak{D}_3 \\
\mathfrak{D}_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
 & \mathfrak{D}_5 \\
 & \mathfrak{D}_7 \\
 & \vdots
\end{tikzcd}$$

# Subcategorías finitas de $\mathbb{Z}_D^+$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D}_2 & \mathfrak{D}_4 \\
 & & \mathfrak{D}_6 \\
 & \mathfrak{D}_3 & \mathfrak{D}_9 \\
 & & \vdots \\
\mathfrak{D}_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \\
 & \mathfrak{D}_5 & \\
 & & \\
 & \mathfrak{D}_7 & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}$$

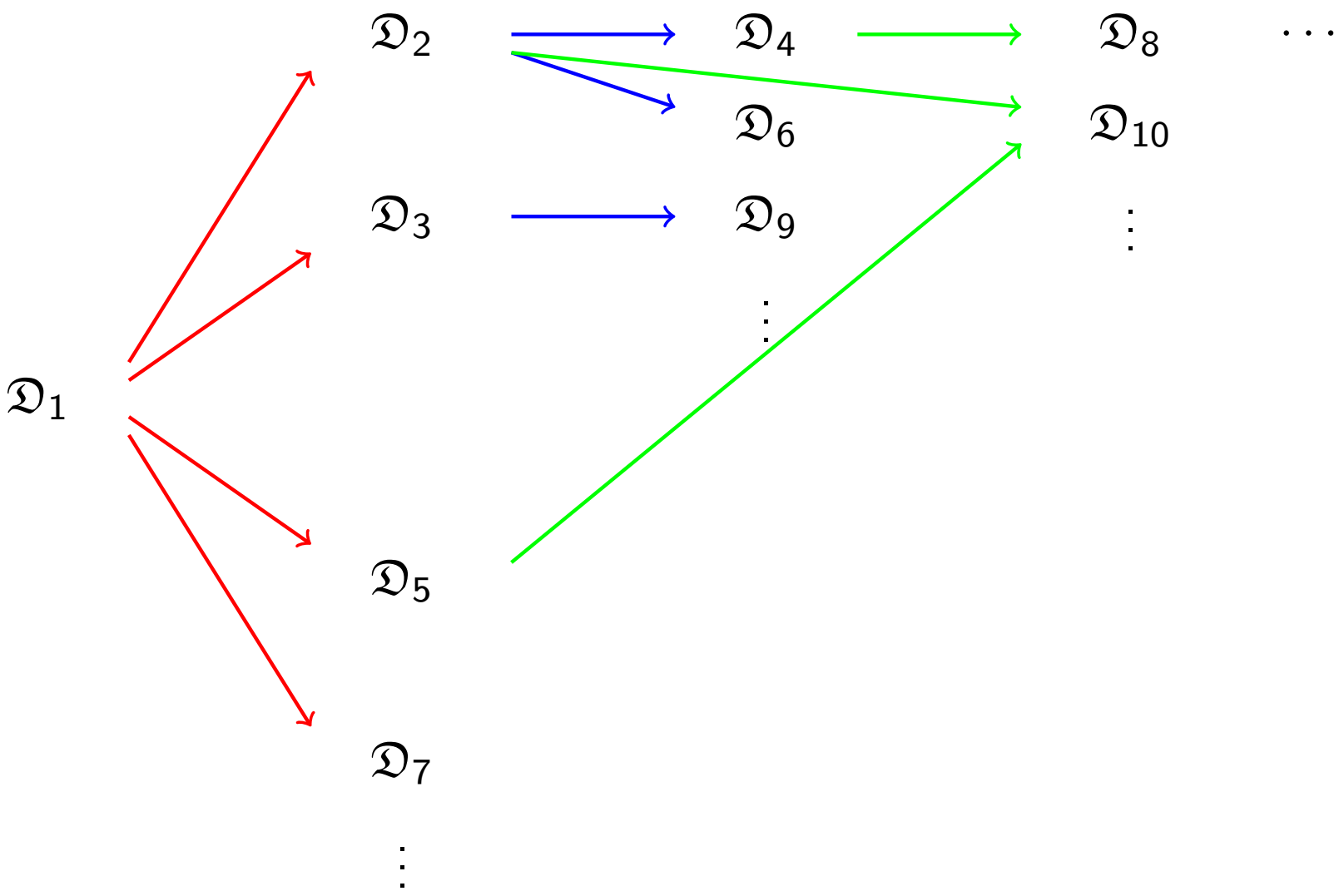
# Subcategorías finitas de $\mathbb{Z}_D^+$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D}_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{D}_4 \\
 & & \mathfrak{D}_6 \\
 & \mathfrak{D}_3 \arrow[r] & \mathfrak{D}_9 \\
 & & \vdots \\
\mathfrak{D}_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & \\
 & \mathfrak{D}_5 & \\
 & \mathfrak{D}_7 & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

# Subcategorías finitas de $\mathbb{Z}_D^+$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{D}_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{D}_4 & \mathfrak{D}_8 & \cdots \\
 & & \mathfrak{D}_6 & \mathfrak{D}_{10} & \\
 & \mathfrak{D}_3 \arrow[r] & \mathfrak{D}_9 & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
\mathfrak{D}_1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & & & \\
 & \mathfrak{D}_5 & & & \\
 & \mathfrak{D}_7 & & & \\
 & \vdots & & &
\end{tikzcd}
$$

# Subcategorías finitas de $\mathbb{Z}_D^+$



# Subcategorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

$\mathbb{Z}_D^+$

# Subcategorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

$2\mathbb{Z}_D^+$

$3\mathbb{Z}_D^+$

$\mathbb{Z}_D^+$

$5\mathbb{Z}_D^+$

$7\mathbb{Z}_D^+$

$\vdots$

# Subcategorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\mathbb{Z}_D^+ \arrow[dl] \\
 & 3\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] \\
\mathbb{Z}_D^+ & \\
 & 5\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] \\
 & 7\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] \\
 & \vdots
\end{tikzcd}
$$

# Subcategorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\mathbb{Z}_D^+ \arrow[dl] & 4\mathbb{Z}_D^+ \\
 & & 6\mathbb{Z}_D^+ \\
 & 3\mathbb{Z}_D^+ \arrow[dl] & 9\mathbb{Z}_D^+ \\
 & & \vdots \\
\mathbb{Z}_D^+ & & \\
 & 5\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & \\
 & 7\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

# Subcategorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\mathbb{Z}_D^+ & 4\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] \\
 & & 6\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] \\
 & 3\mathbb{Z}_D^+ & 9\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] \\
 & & \vdots \\
\mathbb{Z}_D^+ & & \\
 & 5\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & \\
 & 7\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & \\
 & \vdots \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

# Subcategorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\mathbb{Z}_D^+ & 4\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] & 8\mathbb{Z}_D^+ & \cdots \\
 & & 6\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & 10\mathbb{Z}_D^+ & \\
 & 3\mathbb{Z}_D^+ & 9\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
\mathbb{Z}_D^+ & & & & \\
 & 5\mathbb{Z}_D^+ & & & \\
 & 7\mathbb{Z}_D^+ & & & \\
 & \vdots & & &
\end{tikzcd}
$$

# Subcategorías equivalentes a $\mathbb{Z}_D^+$

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\mathbb{Z}_D^+ & 4\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] & 8\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] & \cdots \\
 & & 6\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & 10\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
 & 3\mathbb{Z}_D^+ & 9\mathbb{Z}_D^+ \arrow[l] & \vdots & \\
 & & \vdots & & \\
\mathbb{Z}_D^+ & & & & \\
 & 5\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & & & \\
 & 7\mathbb{Z}_D^+ \arrow[ul] & & & \\
 & \vdots \arrow[ul] & & &
\end{tikzcd}
$$

# Parte IX

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1940.
- G. Grätzer, *Lattice Theory*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1971.
- P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant A Topos Theory Compendium*, Vol 1,2, Oxford University Press, Cambridge, 2002.
- A.J. Lindenhovius, *Grothendieck topologies on posets*, arXiv:1405.4408v2, 2014.
- Joaquín Luna-Torres, *Sheaves in Elementary Mathematics:the case of positive integer numbers*, arXiv:1506.02551, 2015.

- Joaquín Luna-Torres and Carlos Orlando Ochoa C, *Interior Operators and Topological Categories*, Advances and Applications in Mathematical Sciences, vol. 10, Issue 2, 2011, pages 189-206, Mili Publications, Allahabad, India, 2011.
- S. MacLane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to Topos theory*, Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin,1992.