Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
X Olimpiadas Regionales de Matemáticas.
PRIMARIA.

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento"

-**George Polya.**

MARATÓN OLÍMPICA

SOLUCIONARIO DEL RETO 1.

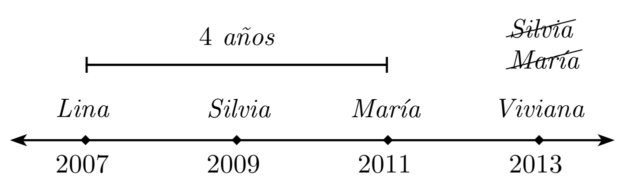
NIVEL BÁSICO

PROBLEMA 1.

Cuatro hermanas: María, Viviana, Lina y Silvia nacieron en años diferentes: 2007, 2009, 2011 y 2013; no necesariamente en ese orden. Si se sabe que la menor no es María ni Silvia, y que María es 4 años menor que Lina, ¿en que año nació Viviana?

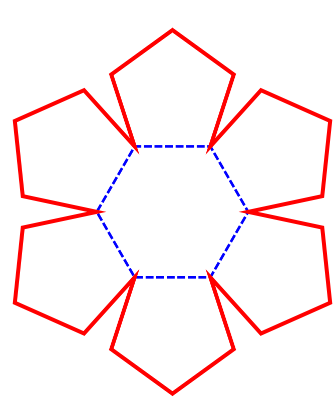
(a) 2007 (b) 2009 (c) 2011 (d) 2013

Solución: *La menor de las cuatro hermanas no es María ni Silvia, entonces ellas no nacieron en el* 2013. *Además, María es* 4 *años menor que Lina, luego Lina nació en el* 2017 *y María en el* 2011. *Finalmente, se concluye que Silvia nació en el* 2009, *y por lo tanto Viviana nació en el* 2013.



PROBLEMA 2.

El centro de la flor que se muestra en la figura es un hexágono regular de perímetro $12\,cm$ y sus pétalos son pentágonos regulares. ¿Cuál es el perímetro de la flor?



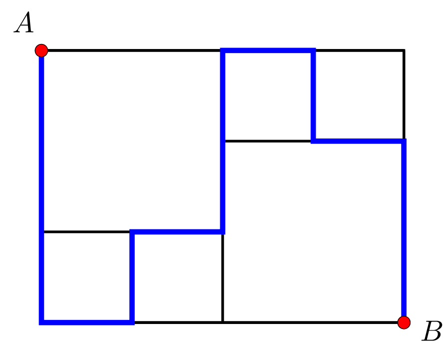
(a) $24\,cm$ (b) $48\,cm$ (c) $30\,cm$ (d) $60\,cm$

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Solución: *El centro de la flor es un hexágono regular de perímetro* $12\,cm$, *entonces cada uno de sus lados mide* $12 \div 6 = 2\,cm$. *Además, los pétalos de la flor son pentágonos regulares cuyos lados miden igual que los del hexágono, es decir* $2\,cm$. *Note que el contorno de la flor está formado por* $6 \times 4 = 24$ *de estos lados; por lo tanto el perímetro de la flor es* $24 \times 2\,cm = 48\,cm$.

Problema 3.

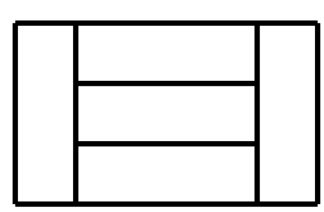
La siguiente figura está construida por cuadrados. Una hormiga se mueve desde el punto A hasta el punto B, siguiendo el camino marcado. Si el lado del cuadrado más grande mide $20\ cm$, ¿cuántos centímetros caminó la hormiga?



Solución: *La figura está formada por cuadrados y cada lado de los cuadrados más grandes mide* $20\,cm$, *entonces se puede deducir que el lado de los cuadrados pequeños mide* $10\,cm$. *Ahora bien, la hormiga recorre* 3 *veces el lado del cuadrado grande y* 7 *veces el lado del cuadrado pequeño, de ahí que la hormiga recorrió* $3 \times 20 + 7 \times 10 = 130\,cm$ *en total.*

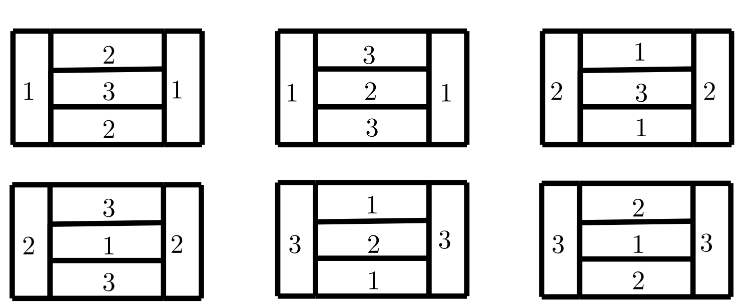
Problema 4.

¿De cuántas maneras se pueden pintar las regiones de la siguiente figura, con 3 colores, si dos regiones vecinas no pueden tener el mismo color?



(a) 15 (b) 9 (c) 6 (d) 1

Solución: *Dado que dos regiones vecinas no pueden tener el mismo color, las dos columnas deben compartir color y la primera y última fila deben tener un color distinto al de las columnas. De esta manera queda determinado el color de la región restante en cada caso. Sean* 1, 2 *y* 3 *los diferentes colores; las* 6 *maneras de pintar las regiones de la figura se muestran a continuación:*

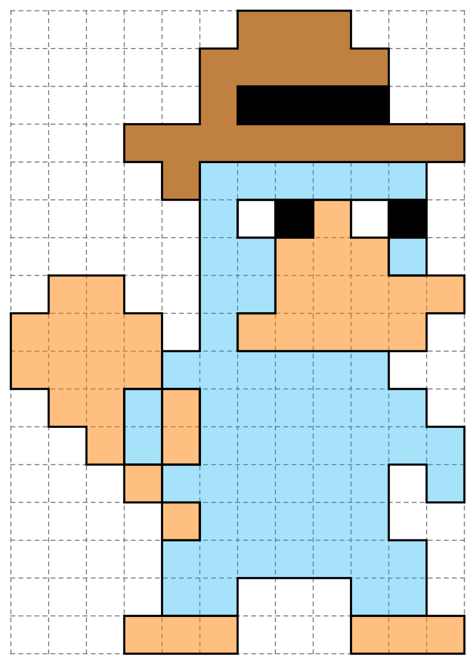


Problema 5. Relevos.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**.

I. Emiliano tiene cuatro afiches de sus caricaturas favoritas para decorar su habitación. Si su habitación tiene cuatro paredes y quiere pegar un afiche en el centro de cada pared, de cuántas formas puede Camilo decorar su habitación?

II. La siguiente figura muestra el afiche favorito de Emiliano, se trata de Perry el ornitorrinco dibujado sobre una cuadrícula. Si la longitud del lado más corto del afiche, en centímetros, coincide con el número de la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es el perímetro de la silueta de Perry?



III. La edad de Emiliano coincide con la suma de las cifras del número de la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es la edad de Emiliano?

Solución:

I. *Para determinar el número de formas diferentes para decorar usaremos el principio de multiplicidad. Dado que Emiliano tiene* 4 *afiches, se tiene que*

$$\underbrace{4 \text{ opciones}}_{\text{Pared } 1} \times \underbrace{3 \text{ opciones}}_{\text{Pared } 2} \times \underbrace{2 \text{ opciones}}_{\text{Pared } 3} \times \underbrace{1 \text{ opción}}_{\text{Pared } 4}.$$

Luego el número de formas en que puede decorar su habitación es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

II. *La longitud del lado más corto del afiche es* $24\,cm$. *Como este lado está formado a su vez por* 12 *lados de cuadrados de la cuadrícula, se deduce que la longitud del lado de cada cuadrado de la cuadrícula es* $2\,cm$. *Ahora, el contorno de Perry está formado por* 84 *de estos lados, por tanto el perímetro de la figura de Perry es* $2 \times 84 = 168\,cm$.

III. *Finalmente, la edad de Emiliano es* $1 + 6 + 8 = 15$ *años.*

Nivel Medio

Problema 1.

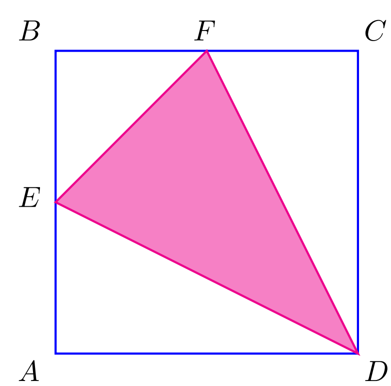
¿Cuántos números de tres cifras hay tales que las unidades son la mitad de las decenas y la tercera parte de las centenas?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Solución: *Sea abc el número de tres cifras, se tiene que* $c = \frac{b}{2}$ *y* $c = \frac{a}{3}$, *luego* $b = 2 \times c$ *y* $a = 3 \times c$. *Como* a, b *y* c *son dígitos, entonces los únicos valores que puede tomar* c *son:* $1, 2$ *y* 3. *Por lo tanto solo hay tres números que cumplen las condiciones del enunciado, a saber:* 321, 642 *y* 963.

Problema 2.

En la siguiente figura se representa un cuadrado $ABCD$ que tiene $8\,cm$ de lado. Si E y F son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, ¿cuál es el área del triángulo EFD?



(a) $32\,cm^2$ (b) $24\,cm^2$ (c) $16\,cm^2$ (d) $8\,cm^2$

Solución: *Note que el área sombreada corresponde al área del cuadrado* $ABCD$ *menos el área de cada uno de los triángulos* ADE, EBF *y* FCD.

El área del cuadrado $ABCD$ *es* $8\,cm \times 8\,cm = 64\,cm^2$, *además como* E *y* F *son los puntos medios de los segmentos* $\overline{AB}$ *y* $\overline{BF}$ *respectivamente, entonces* $EA = EB = BF = 4\,cm$. *Así, las áreas de los triángulos* ADE, EBF *y* FCD *son, respectivamente,* $\frac{8\,cm \times 4\,cm}{2} = 16\,cm^2$, $\frac{4\,cm \times 4\,cm}{2} = 8\,cm^2$, *y* $\frac{8\,cm \times 4\,cm}{2} = 16\,cm^2$. *Por lo tanto, el área del triángulo* EFD *es* $64\,cm^2 - 16\,cm^2 - 8\,cm^2 - 16\,cm^2 = 24\,cm^2$.

Problema 3.

¿Cuántas sucesiones de 4 sonidos diferentes se pueden tocar con un piano al que solo le funcionan 6 teclas, si se toca una tecla a la vez?

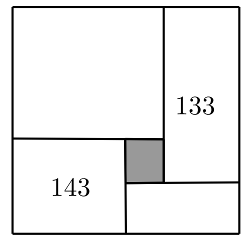
(a) 24 (b) 1296 (c) 360 (d) 256

Solución: *Dado que las sucesiones deben ser de* 4 *sonidos diferentes, entonces las teclas no se pueden repetir y el orden al tocarlas importa. Así, para el primer sonido tenemos* 6 *opciones, para el segundo sonido tenemos* 5 *opciones, pues la tecla que se tocó primero ya no se puede usar; del mismo modo, para el tercer sonido tenemos* 4 *opciones y para el cuarto sonido tenemos* 3 *opciones. Así, por el principio multiplicativo tenemos* $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$, *sucesiones de cuatro sonidos diferentes.*

$$\underbrace{6\ opc.}_{sonido\ 1} \times \underbrace{5\ opc.}_{sonido\ 2} \times \underbrace{4\ opc.}_{sonido\ 3} \times \underbrace{3\ opc.}_{sonido\ 4} = \underbrace{360.}_{sucesiones}$$

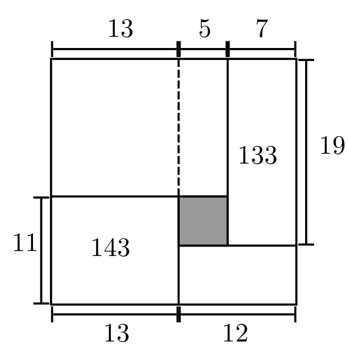
PROBLEMA 4.

Un cuadrado de área $625\,cm^2$ se cubre con rectángulos cuyas longitudes de los lados, en centímetros, son números naturales mayores que 3, dejando un cuadrado pequeño en el centro, como se muestra en la siguiente figura.



Las áreas de dos de los rectángulos, en centímetros cuadrados, son las que están escritas sobre ellos. Encuentre el área del cuadrado que está en el centro.

Solución: *Dado que el área del cuadrado es* $625\,cm^2$, *cada lado del cuadrado mide* $25\,cm$, *además* $143 = 11 \times 13$ *y* $133 = 7 \times 19$, *entonces una posibilidad para las longitudes de los lados de los rectángulos es como se muestra en la figura, así; el área del cuadrado encerrado es* $5 \times 5 = 25\,cm^2$.

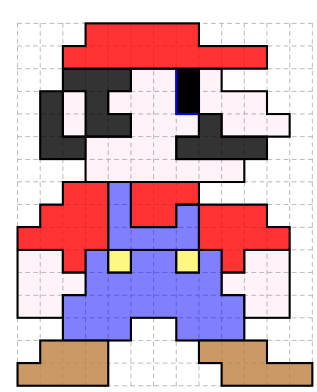


PROBLEMA 5. RELEVOS.

Este problema consta de tres enunciados. Tenga en cuenta que el enunciado **II** depende de la respuesta del enunciado **I** y el enunciado **III**, de la respuesta del enunciado **II**.

I. Lucía lista en su agenda todos los números pares de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 4 y 6. ¿Cuántos números tiene la lista de Lucía?

II. Diego colorea la figura de Mario Bros sobre una cuadrícula como se muestra en la imagen. Si el área, en centímetros cuadrados, de cada cuadradito de la cuadrícula coincide con la respuesta del ítem anterior, ¿cuál es el perímetro de la figura de Mario Bros?



III. El total de niños y niñas que asistieron a una fiesta de Halloween coincide con la respuesta del ítem anterior. Si se sabe que el número de niñas excede en 20 al número de niños, ¿cuál es la cantidad de niñas que asistieron a la fiesta?

Solución:

I. *La cifra de las decenas de los números de la lista de Lucía debe ser* 1, 2, 4 *o* 6; *mientras que la cifra de las unidades debe ser* 0, 2, 4 *o* 6, *pues son pares. De modo que la cifra de las decenas se puede escoger de* 4 *formas y la cifra de las unidades también de* 4 *formas, es decir, la lista de Lucía tiene* $4 \times 4 = 16$ *números.*

$$\underbrace{4 \text{ opciones}}_{decenas} \times \underbrace{4 \text{ opciones}}_{unidades} = \underbrace{4 \times 4 = 16}_{números}.$$

También es factible listar los números:

10	40	12	42	14	44	16	46
20	60	22	62	24	64	26	66

II. *El área de cada cuadradito de la cuadrícula es igual a* $16\,cm^2$*, es decir el lado de cada cuadradito es igual a* $4\,cm$*. Por lo tanto el perímetro de la figura de Mario Bros es* $88 \times 4\,cm = 352\,cm$*.*

III. *El total de niños y niñas que asistieron a la fiesta de Halloween es* 352*. La cantidad de niñas excede en* 20 *al número de niños, es decir que si se resta* $352 - 20 = 332$*, se obtiene la misma cantidad de niños que de niñas, por tanto* $332 \div 2 = 166$ *indica la cantidad de niños en la fiesta, así la cantidad de niñas en la fiesta es* $166 + 20 = 186$*.*

Nivel Avanzado

Problema 1.

Cuatro estudiantes responden Verdadero (V) o Falso (F) en un examen de 5 preguntas como se muestra en la siguiente tabla

	Felipe	Nicolás	Ana	Lucía
Pregunta 1	V	F	V	V
Pregunta 2	F	F	F	V
Pregunta 3	F	V	F	F
Pregunta 4	V	F	F	V
Pregunta 5	F	V	V	F

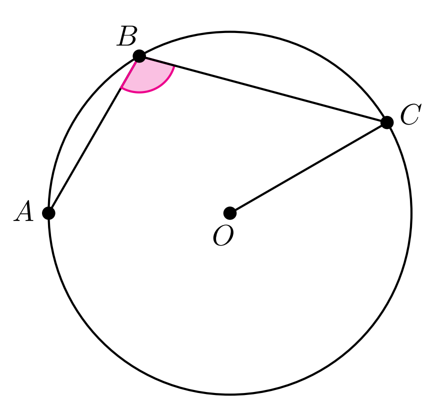
Si uno de los estudiantes contestó bien todas las preguntas, otro contestó bien solo dos y otro falló en todas sus respuestas, ¿cuántas preguntas contestó bien Felipe?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

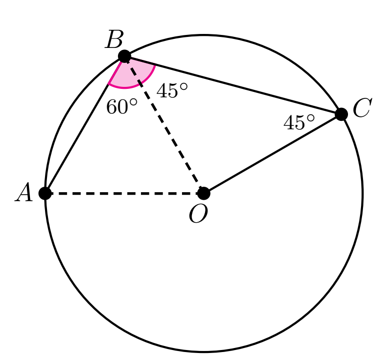
Solución: Se sabe que uno de los estudiantes contestó todas las preguntas bien y otro falló en todas, y se observa que Nicolás y Lucía son los únicos que tienen todas las respuestas distintas entre ellos, luego uno de ellos contestó todo bien y el otro todo mal. Ahora, como otro estudiante contestó bien solo dos respuestas, comparamos las respuesas de Felipe y Ana, con las de Nicolás y Lucía notando que las respuestas de Felipe coinciden en 4 respuestas con Lucía y en 1 con las de Nicolás, mientras que las respuestas de Ana coinciden en 2 con las de Lucía, y en 3 con las de Nicolás. De lo anterior se concluye que Lucía es quien tiene todas las respuestas correctas, y así Felipe contestó bien 4 preguntas.

Problema 2.

Hallar la medida del ángulo sombreado en la siguiente figura, sabiendo que O es el centro del círculo, $AB = OC$ y el ángulo BCO mide $45°$.



Solución: Trazando los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$, como se muestra en la figura, se observa que el triángulo ABO es equilátero, por lo tanto el ángulo ABO mide $60°$; y también que el triángulo BOC es isósceles en O, luego $\measuredangle OBC = \measuredangle BCO = 45°$.



Así, tenemos que $\measuredangle ABC = \measuredangle ABO + \measuredangle OBC = 60° + 45° = 105°$.

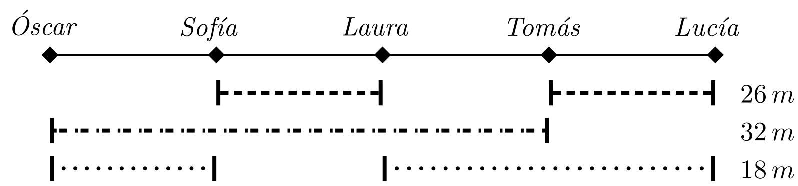
Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Scan me

Problema 3.

Las casas de Óscar, Sofía, Laura, Tomás y Lucía están ubicadas, en ese orden, a lo largo de una calle recta. Encuentre la distancia entre las casas de Óscar y Lucía, sabiendo que: cuando Sofía visita a Lucía recorre $26\,m$ más de lo que recorre Laura cuando visita a Tomás, además Lucía vive $32\,m$ más alejada de Óscar que de Tomás, y cuando Óscar visita a Sofía y Laura visita a Lucía recorren $18\,m$ en total.

Solución: *Cuando Sofía visita a Lucía recorre $26\,m$ más de lo que recorre Laura cuando visita a Tomás, de donde se concluye que la distacia de la casa de Sofía a la de Laura más la distancia de la casa de Tomás a la de Lucía es $26\,m$. También, Lucía vive $32\,m$ más alejada de Óscar que de Tomás, luego la distancia de la casa de Tomás a la de Óscar es $32\,m$. Finalmente, cuando Óscar visita a Sofía y Laura visita a Lucía recorren en total $18\,m$, de ahí que la distancia de la casa de Óscar a la de Sofía más la distancia de la casa de Laura a la de Lucía es $18\,m$; como se muestra en la siguiente gráfica.*



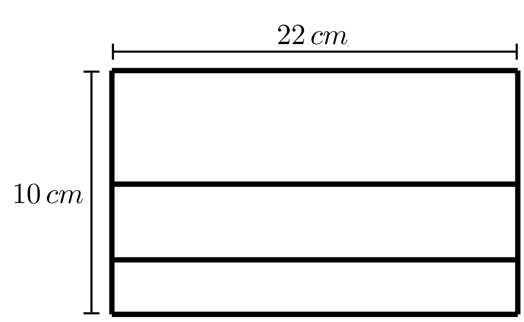
Observe que la suma $26\,m + 32\,m + 18\,m = 76\,m$, coincide con el doble de la distancia de la casa de Óscar a la casa de Lucía, por lo tanto, esta distancia es $38\,m$.

Problema 4.

Se desea elaborar la bandera de un país, con un rectángulo de $10\,cm \times 22\,cm$, como se muestra en la figura; de tal forma que tenga tres franjas horizontales de diferentes colores, con las siguientes características:

- el área de la franja superior debe ser mayor que el área de la franja del medio, y el área de la franja del medio debe ser mayor que el área de la franja inferior.
- las dimensiones, en centímetros, de cada franja deben ser números naturales.
- solo se pueden usar los colores: amarillo, azul y rojo.

¿De cuántas formas se puede diseñar la bandera con estas características?



Solución: *Las formas de escribir a 10 como suma de tres números naturales diferentes son:*

- $10 = 1 + 2 + 7$,
- $10 = 1 + 3 + 6$,
- $10 = 1 + 4 + 5$,
- $10 = 2 + 3 + 5$.

De esta manera, hay 4 opciones para elegir el tamaño de las franjas de la bandera.
Por otra parte, para cada una de las opciones hay 6 formas de elegir el orden de los colores:

- *amarillo - azul - rojo.*
- *amarillo - rojo - azul.*
- *azul - amarillo - rojo.*
- *azul - rojo - amarillo.*
- *rojo - amarillo - azul.*
- *rojo - azul - amarillo.*

Por lo tanto hay $6 \times 4 = 24$ formas diferentes de diseñar la bandera.

Informes:
olimpiadas.matematicas@uis.edu.co
Tel.: 6344000 *ext.* 2316; 6450301.
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS.
@edumat.uis

Scan me

PROBLEMA 5.

La sucesión de Fibonacci es una sucesión de números naturales donde cada término de la sucesión después del segundo es la suma de los dos términos inmediatamente anteriores, siendo 0 y 1 los términos iniciales. Los primeros términos de esta sucesión son:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

¿Cuantos números pares hay en la sucesión hasta el término 2014?

(a) 3 (b) 672 (c) 4 (d) 671 (e) 1007

Solución: El primer elemento de la sucesión es par y los siguientes dos son impares, después el cuarto término es par y los siguientes dos son impares, así sucesivamente. Al dividir 2014 *entre* 3 *obtenemos* 671 *y residuo* 1*, es decir hay* 671 *tripletas de términos de la sucesión donde el primero es par y los siguientes dos son impares, teniendo en cuenta el residuo concluimos que hay* 672 *números pares hasta el término* 2014 *de la sucesión.*