



INSTRUCCIONES PARA PRESENTAR LA PRUEBA

1. Asegúrese que el examen y la hoja de respuestas que le entregan corresponde a su nivel, los niveles son: Nivel Básico (grado 6° y 7°), Nivel Medio (grado 8° y 9°), y Nivel Avanzado (grado 10° y 11°).
2. El examen consta de 6 preguntas tipo ensayo (respuesta abierta). Para contestar una pregunta escriba el procedimiento que permita resolver el problema, así como su respectiva justificación. Si aparece más de una respuesta en la misma pregunta, dicha respuesta se considerará incorrecta.
3. Para la realización del examen solo se necesita lápiz y borrador, por tanto NO se permite el uso de ningún tipo de material adicional (computadores, celulares, calculadoras, libros, cuadernos, etc).
4. El examen se calificará de la siguiente manera. Cada respuesta tendrá un valor máximo de 6 puntos. Las preguntas sin contestar no tendrán valor.
5. El estudiante no está autorizado para hacer preguntas durante el examen.
6. Al terminar el examen el estudiante debe devolver al profesor encargado únicamente la HOJA DE RESPUESTAS y puede conservar este temario, sin olvidar marcarla con su nombre, colegio, grado, número de identificación y firma.

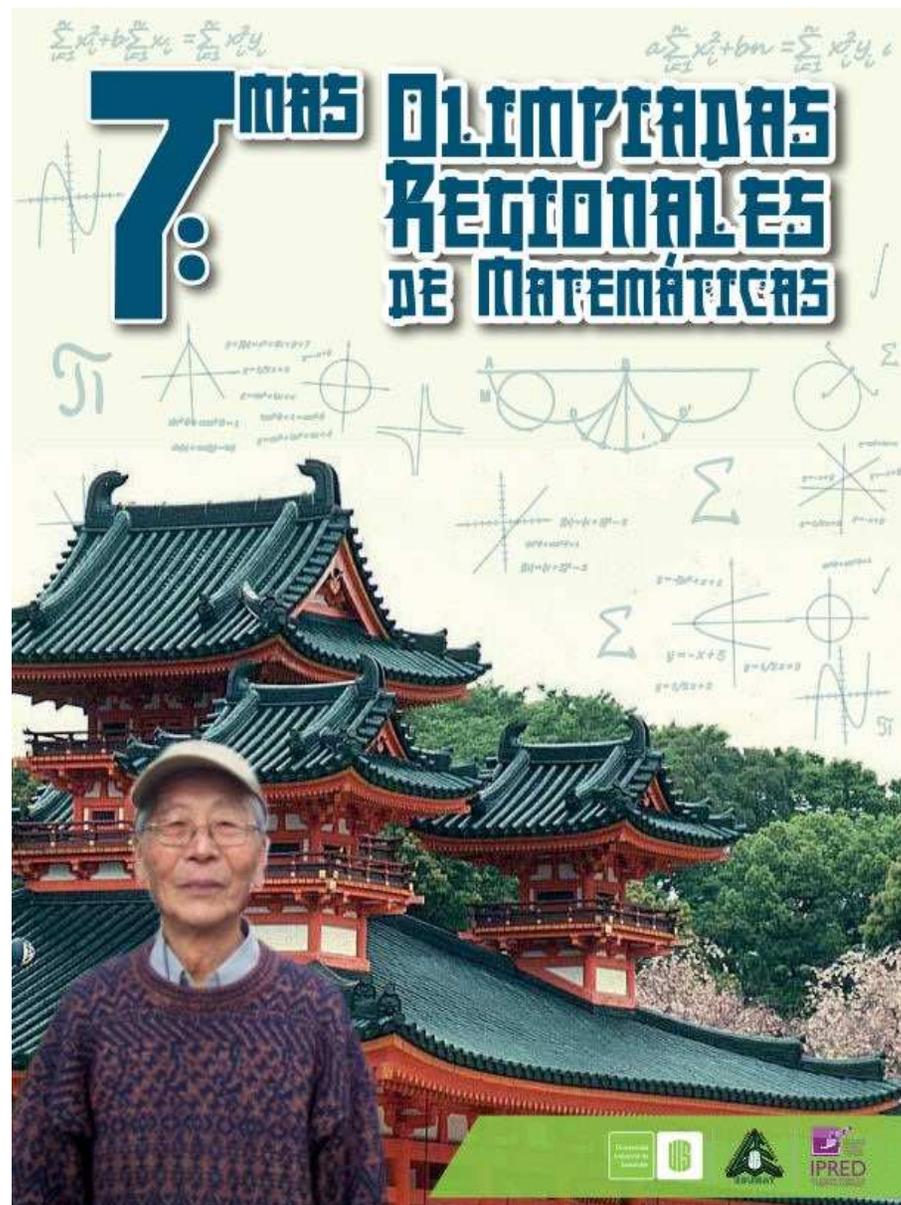


Universidad Industrial de Santander
<http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas>
olimpiadas@matematicas.uis.edu.co



Síguenos en Facebook:
Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS

Prueba Final Nivel Avanzado



PRUEBA FINAL NIVEL AVANZADO

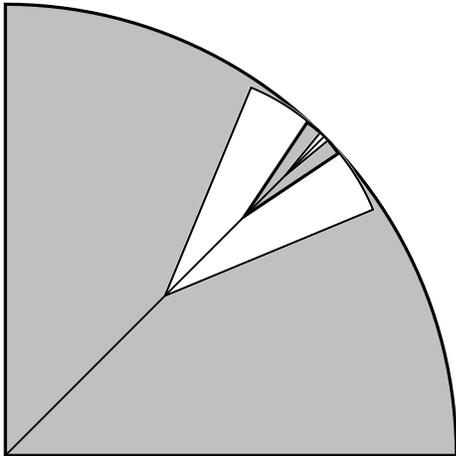
1. Sea f una función definida de los reales positivos en los reales positivos tal que

$$3f(x) + 5f\left(\frac{4}{3x}\right) = 7x^2.$$

Encuentre $f(4)$.

2. Para cada número entero positivo n , $\kappa(n)$ representa el número de sus divisores primos. Demuestre que el conjunto de todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que $a \neq b$ y $\kappa(a + b) = \kappa(a) + \kappa(b)$ es un conjunto infinito.

3. En la siguiente figura se toma un cuarto de circunferencia de radio 1 cm y sobre él se construyen sectores circulares, de tal forma que éstos tengan la mitad del radio y la mitad del ángulo del sector anterior. Determine el área sombreada resultante tras realizar el proceso n veces.



4. A cada uno de 500 números se les suma 1 y se observa que la suma de los cuadrados de los nuevos números es igual a la suma de los cuadrados de los números originales. Si a cada uno de los nuevos números se les suma 1, ¿cuál es la diferencia entre la suma de los cuadrados de estos números y la suma de los cuadrados de los originales?

5. Un par de triángulos, cuyos lados tienen longitudes enteras, se llaman *primos* si existe una relación uno a uno entre sus lados, tal que el máximo común divisor entre las medidas de cada pareja de lados es 1. Dado el conjunto

$$P = \{(a, b, c) \mid 2 \leq a \leq 9, b = a + 3, c = a + 4; \text{ con } a \in \mathbb{N}\};$$

donde la tripla (a, b, c) representa el triángulo con lados de longitudes a, b, c ; hallar el número de parejas de triángulos de P que son primos.

NOTA: Un triángulo puede ser primo consigo mismo; por ejemplo $(5, 4, 3)$.

6. Sobre una superficie horizontal se sitúa un tanque cúbico con aristas de longitud 1 m que contiene agua ocupando la mitad del volumen total, de tal forma que la profundidad del agua medida desde la superficie horizontal es $0,5\text{ m}$. El tanque se rota dejando una arista sobre la superficie y formando un ángulo de 30° . Halle la profundidad del agua en el tanque después de la rotación.